Aufgabe 1 (4 Punkte):

Seien $p, q \in \mathbb{N}$ Primzahlen, $p \neq q$. Zeigen Sie $\sqrt{q} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ und bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbb{Q}]$. Finden Sie ferner ein primitives Element für $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})|\mathbb{Q}$.

Gesucht: $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ mit $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\alpha)$

Wähle $\alpha := \sqrt{p} + \sqrt{q}$

„$\supseteq$" klar

„$\subseteq$" $(\alpha - \sqrt{p})^2 = q$

$$\alpha^2 - 2\alpha \cdot \sqrt{p} + p = q$$

$$\sqrt{p} = \frac{q - p - \alpha^2}{-2\alpha} \in \mathbb{Q}(\alpha)$$

Noch zu zeigen: $\sqrt{q} \in \mathbb{Q}(\alpha)$

$$(\alpha - \sqrt{q})^2 = p$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{q} + q = p$$

$$\sqrt{q} = \frac{p - q - \alpha^2}{-2\alpha} \in \mathbb{Q}(\alpha)$$

$\Rightarrow \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$

$\Rightarrow \alpha$ primitives Element

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei $z = e^{2\pi i/5} \in \mathbb{C}$.

(i) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von z über $\mathbb{Q}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(z + z^4) : \mathbb{Q}] = 2$ ist.

(iii) Bestimmen Sie den Grad von $\mathbb{Q}(z)$ über $\mathbb{Q}(z + z^4)$.

nämlich $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$.

Veranschaulicht man sich n-ten Einheitswurzeln von $\mathbb{C}$ graphisch in der Gauß'schen Zahlenebene, so liegen diese in regelmäßigen Abständen über den Einheitskreis verteilt. Man spricht deshalb bei $\mathbb{Q}(\mu_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ vom n-ten *Kreisteilungskörper* oder auch *zyklotomischen Körper*. Das Minimalpolynom von ζ_n heißt entsprechend n-tes *Kreisteilungspolynom* und wird mit Φ_n bezeichnet.

Satz 3.17. Sei $n \in \mathbb{N}$ und Φ_n das n-te Kreisteilungspolynom.

(1) Φ_n ist ein Polynom von Grad $\varphi(n)$ mit ganzzahligen Koeffizienten.

(2) Es gilt die Formel $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$.

i) Nach Satz 3.17 (2) gilt $\mu_{z,\mathbb{Q}} = \Phi_5$

wobei $X^5 - 1 = \prod_{d|5} \Phi_d = \underbrace{\Phi_1}_{=(X-1)} \cdot \Phi_5$

$$\Phi_5 = (X^5 - 1) : (X - 1) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

$$\begin{array}{l} -(X^5 - X^4) \\ \hline X^4 - 1 \\ -(X^4 - X^3) \\ \hline X^3 - 1 \\ -(X^3 - X^2) \\ \hline X^2 - 1 \\ -(X^2 - X) \\ \hline X - 1 \\ -(X - 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \mu_{z,\mathbb{Q}} = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

Minimalpolynom

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei $z = e^{2\pi i/5} \in \mathbb{C}$.

(i) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von z über $\mathbb{Q}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(z + z^4) : \mathbb{Q}] = 2$ ist.

(iii) Bestimmen Sie den Grad von $\mathbb{Q}(z)$ über $\mathbb{Q}(z + z^4)$.

Wir wissen: $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = \operatorname{grad} \mu_{z,\mathbb{Q}} = 4$

Aus dem Gradsatz folgt:

$$4 = [\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}(z + z^4)] \cdot [\mathbb{Q}(z + z^4) : \mathbb{Q}]$$

$\Rightarrow [\mathbb{Q}(z + z^4) : \mathbb{Q}] \mid 4$

$\Rightarrow \underbrace{[\mathbb{Q}(z + z^4) : \mathbb{Q}]}_{=:d} \in \{1, 2, 4\}$

Ansatz: $\mu_{z+z^4,\mathbb{Q}} = X^2 + aX + b \in \mathbb{Q}[X]$

$$\mu_{z+z^4,\mathbb{Q}}(z+z^4) = 0$$

$$(z+z^4)^2 + a\cdot(z+z^4) + b = 0$$

$$= z^2 + 2\cdot \underbrace{z^5}_{=1} + \underbrace{z^8}_{=z^5\cdot z^3 = z^3,\ z^5 = 1} + az + az^4 + b = 0$$

$$= a\cdot z^4 + z^3 + z^2 + az + b + 2 = 0$$

Wähle $a := 1$ und $b := -1$

Dann ist $az^4 + z^3 + z^2 + az + b + 2$

$$= \underbrace{\Phi_5}_{=\mu_{z,\mathbb{Q}}}(z) = 0$$

Beh.

$$\Rightarrow \mu_{z+z^4,\mathbb{Q}} = X^2 + X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

Das ist irreduzibel über $\mathbb{Q}[X]$, da es vom Grad 2 ist und es keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ hat (wegen dem Lemma von Gauß)

Aussage [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Für jede rationale Nullstelle eines ganzzahligen Polynoms gilt, dass der Zähler ihrer gekürzten Darstellung das Absolutglied und der Nenner den Leitkoeffizienten des Polynoms teilt.

Seien also $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$ ein Polynom vom Grad n und $x_0 = \frac{p}{q}$ (wobei $p, q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd sind) eine rationale Nullstelle von f, dann ist a_0 durch p teilbar und a_n durch q teilbar.

$$\Rightarrow [\mathbb{Q}(z+z^4) : \mathbb{Q}] = \operatorname{grad} \mu_{z+z^4,\mathbb{Q}} = \operatorname{grad}(X^2 + X - 1) = 2$$

(iii) Bestimmen Sie den Grad von $\mathbb{Q}(z)$ über $\mathbb{Q}(z+z^4)$.

$$[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}(z+z^4)] \underset{\text{Gradsatz}}{=} \frac{[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(z+z^4) : \mathbb{Q}]} = \frac{4}{2} = 2 \quad \square$$

Definition 3.8. Eine algebraische Körpererweiterung $L|K$ heißt *normal*, wenn sie eine der folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt:

(1) Jedes irreduzible Polynom aus $K[X]$, das in L eine Nullstelle besitzt, zerfällt über L bereits in Linearfaktoren.

(2) Es gibt ein nicht-konstantes Polynom $f \in K[X]$, sodass L der Zerfällungskörper von f über K ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Zeigen Sie, dass Körpererweiterungen vom Grad 2 stets normal sind.

Sei $L|K$ Körpererweiterung mit $[L:K]=2$

Sei $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom

mit eine Nullstelle $\alpha \in L$.

$$2=[L:K] \underset{\text{Gradsatz}}{=} [L:K(\alpha)]\cdot[K(\alpha):K]$$

$$\Rightarrow [K(\alpha):K] \in \{1,2\}$$

$\|$

grad f $\leftarrow$ Wenn man f normiert erhält man das Minimalpolynom $\mu_{\alpha,K}$

$\Rightarrow$ grad $\{1,2\}$

Falls grad $f=1$ $\Rightarrow$ f ist ein Linearfaktor, d.h. zerfällt über L in Linearfaktoren

Falls grad $f=2$

Dann finden wir $g \in L[X]$ mit grad$(g)=1$

sodass $f=(X-\alpha)\cdot g$ ✓

Linearfaktoren

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei $f = T^4 - 5 \in \mathbb{Q}[T]$ und $x \in \mathbb{R}$ eine Wurzel von f.

(i) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper L (mit $L \subseteq \mathbb{C}$) von f über $\mathbb{Q}$. Was ist $[L:\mathbb{Q}]$?

(ii) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $y := x + ix$ über $\mathbb{Q}$ (wobei $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$).

Definition 3.7. Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein nicht-konstantes Polynom. Ein Erweiterungskörper L von K wird *Zerfällungskörper* von f über K genannt, falls

(1) f über L in Linearfaktoren zerfällt, d. h. es gibt $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ und $c \in K^\times$ mit
$$f = c\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i),$$

(2) L über K von Nullstellen von f erzeugt wird.

$T^4-5=0$

$T^4=5$

$T=\sqrt[4]{5}$ $\quad$ f hat die Nullstellen

$x_0 = \sqrt[4]{5}$

$x_1 = \sqrt[4]{5}\cdot \underbrace{e^{\frac{2\pi i}{4}}}_{=\xi_4}$

$x_2 = \sqrt[4]{5}\,\xi_4^2$

$x_3 = \sqrt[4]{5}\,\xi_4^3$

Zerfällungskörper

$$L=\mathbb{Q}(x_0,x_1,x_2,x_3) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5},\xi_4) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, e^{\frac{2\pi i}{4}})$$

$$[L:\mathbb{Q}] = \underbrace{[L:\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})]}_{=\operatorname{grad}\mu_{e^{\frac{2\pi i}{4}},\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})}}\cdot \underbrace{[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}):\mathbb{Q}]}_{=\operatorname{grad}\mu_{\sqrt[4]{5},\mathbb{Q}}=}$$

$= \operatorname{grad}(X^4-5) = \operatorname{grad} f = 4$

$= \operatorname{grad}\Phi_4 = \operatorname{grad}(X^2+1) = 2$

$$X^4-1 = \prod_{d|4}\Phi_d =$$

$= \Phi_1\cdot\Phi_2\cdot\Phi_4$

$= \underbrace{(X-1)\cdot(X+1)}_{X^2-1}\cdot\Phi_4$

$\Phi_4 = \underbrace{(X^4-1)}_{=(X^2-1)\cdot(X^2+1)} : (X^2-1) = X^2+1$

$$\Rightarrow [L:\mathbb{Q}] = 8$$ ☒

Aufgabe 4 (4 Punkte): $\Rightarrow x^4 - 5 = 0$

Sei $f = T^4 - 5 \in \mathbb{Q}[T]$ und $x \in \mathbb{R}$ eine Wurzel von f.

(i) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper L (mit $L \subseteq \mathbb{C}$) von f über $\mathbb{Q}$. Was ist $[L : \mathbb{Q}]$?

(ii) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $y := x + ix$ über $\mathbb{Q}$ (wobei $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$).

$$y^2 = (x+ix)^2 = x^2 + 2ix^2 + i^2x^2$$
$$= x^2 + 2ix^2 - x^2$$
$$= 2 \cdot i \cdot x^2$$

$$y^4 = (y^2)^2 = (2ix^2)^2 = 4 \cdot i^2 \cdot x^4 = -4x^4$$

$x^4 - 5 = 0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} \cdot (\underbrace{-4x^4}_{= y^4}) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Mit } f = -\frac{1}{4}X^4 - 5$$

wäre $f(y) = 0$

<u>Beh.</u> $\mu_{y,\mathbb{Q}} = \underbrace{X^4 + 20}_{g} = (-4) \cdot f$

$$\Rightarrow g(y) = (-4) \cdot \underbrace{f(y)}_{=0} = (-4) \cdot 0 = 0 \checkmark$$

<u>Noch zu zeigen:</u> $\underbrace{X^4 + 20}_{g}$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$

g hat keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ wegen dem Lemma von Gauß!

$$X^4 + 20 = (X^2 + aX + b) \cdot (X^2 + cX + d)$$
$$= X^4 + (a+c)X^3 + (b+d+ac)X^2 + (ad+bc) \cdot X + b \cdot d$$

$\Rightarrow$ I) $a + c = 0$

II) $b + d + ac = 0$

III) $ad + b \cdot c = 0$

IV) $b \cdot d = 20$

$\Rightarrow$ Keine rationale Lsg für a, b, c, d

$\Rightarrow g$ irreduzibel