Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $f(X) = X^3 + X^2 + X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

(i) Zeigen Sie, dass f über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist. (Sie können Aufgabe 2 von Blatt 9 verwenden.)

(ii) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Wurzel von f. Schreiben Sie $(z^2 + z + 1)(z^2 + z)$ und $(z-1)^{-1}$ in der Form $az^2 + bz + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

i)

$f \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\deg f \in \{2,3\}$

f irredusibel $\Leftrightarrow$ f hat keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$

Falls $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $ggT(p,q)=1$ und $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$, so wäre $p \mid 2$ und $q \mid 1$

$\Rightarrow p \in \{\pm 1, \pm 2\}$ und $q \in \{\pm 1\}$

$\Rightarrow \frac{p}{q} \in \{\pm 2, \pm 1\}$

Lemma von Gauß: $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$

Sei $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von f und $ggT(p,q)=1$

Dann gilt $p \mid a_0$ und $q \mid a_n$

$f(2) = 2^3 + 2^2 + 2 + 2 > 0$

$f(-2) = -8 + 4 - 2 + 2 = -8 \neq 0$

$f(1) = 5 \neq 0$

$f(-1) = -1 + 1 - 1 + 2 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow f$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$

$\Rightarrow f$ irredusibel

miro

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $f(X) = X^3 + X^2 + X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

(i) Zeigen Sie, dass f über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist. (Sie können Aufgabe 2 von Blatt 9 verwenden.)

(ii) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Wurzel von f. Schreiben Sie $(z^2+z+1)(z^2+z)$ und $(z-1)^{-1}$ in der Form $az^2 + bz + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

ii) Sei $z \in \mathbb{C}$ und $f(z) = 0$

$$(X^2 + X + 1) \cdot (X^2 + X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X$$

$$(X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X) : (X^3 + X^2 + X + 2) = X + 1$$

$$\begin{array}{l} -(X^4 + X^3 + X^2 + 2X) \\ \hline \quad X^3 + X^2 - X \\ \quad -(X^3 + X^2 + X + 2) \\ \hline \qquad -2X - 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X = \underbrace{(X^3 + X^2 + X + 2)}_{f(X)} \cdot (X+1) - 2X - 2$$

$$\Rightarrow z^4 + 2z^3 + 2z^2 + z = \underbrace{\underbrace{f(z)}_{=0} \cdot (z+1)}_{=0} - 2z - 2$$

$$\Rightarrow \underbrace{z^4 + 2z^3 + 2z^2 + z}_{=(z^2+z+1)\cdot(z^2+z)} = -2z - 2$$

$a = 0 \quad b = -2 \quad c = -2$

miro

(ii) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Wurzel von f. Schreiben Sie $(z^2+z+1)(z^2+z)$ und $(z-1)^{-1}$ in der Form az^2+bz+c mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

$$\overbrace{(X^3+X^2+X+2)}^{f(X)} : (X-1) = X^2+2X+3$$

$$\begin{array}{l}
-\;(X^3-X^2) \\
\hline
\quad 2X^2+X+2 \\
\quad -(2X^2-2X) \\
\hline
\qquad 3X+2 \\
\qquad -(3X-3) \\
\hline
\qquad\quad 5
\end{array}$$

$$\underbrace{X^3+X^2+X+2}_{f(x)} = (X^2+2X+3)\cdot(X-1)+5$$

$$\underbrace{f(z)}_{=0} = (z^2+2z+3)\cdot(z-1)+5$$

$$-5 = (z^2+2z+3)\cdot(z-1) \qquad |:(z-1)$$

$$\frac{-5}{z-1} = z^2+2z+3$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{z^2+2z+3}{-5}$$

$$a=-\frac{1}{5} \qquad b=-\frac{2}{5} \qquad c=-\frac{3}{5}$$

miro

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei $L = K(a)$ mit a algebraisch über K von ungeradem Grad. Zeigen Sie, dass $K(a^2) = K(a)$.

$L|K$ Körpererweiterung, $\alpha \in L$

$[K(\alpha) : K] = \deg \mu_{\alpha,K}$

$\uparrow$ Minimalpolynom

wobei $\mu_{\alpha,K} \in K[X]$ ist 1)• normiert

2)• $\mu_{\alpha,K}(\alpha) = 0$

3)• irreduzibel

Gradsatz

$L|K$ Körpererweiterung und

$K \subseteq M \subseteq L$ Zwischenkörper

$[L : K] = [L : M] \cdot [M : K]$

Es gilt offenbar $K \subseteq K(a^2) \subseteq K(a)$

Mit Gradsatz $\underbrace{[K(a) : K]}_{\text{ungerade}} = [K(a) : K(a^2)] \cdot [K(a^2) : K]$

$\Rightarrow [K(a) : K(a^2)]$ und $[K(a^2) : K]$ ungerade

Mit $g(X) = X^2 - a^2 \in K(a^2)[X]$ gilt $g(a) = a^2 - a^2 = 0$

$\Rightarrow \deg(\mu_{a,K(a^2)}) \leq \deg g = 2 \Rightarrow \deg(\mu_{a,K(a^2)}) \in \{1, 2\}$

$\Rightarrow [K(a) : K(a^2)] = \deg(\mu_{a,K(a^2)}) \underset{\text{ungerade}}{=} 1$

$\Rightarrow K(a) = K(a^2)$ ☒

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Seien $K \subseteq L$ Körper, $L|K$ algebraisch. Zeigen Sie, dass jeder Unterring von L, der K umfasst, ein Körper ist.

Sei M ein Ring mit $K \subseteq M \subseteq L$.

Zu zeigen: $\forall m \in M \setminus \{0\} : m^{-1} \in M$ ($\Rightarrow M$ Körper)

Sei $m \in M \setminus \{0\}$.

Da m^{-1} algebraisch über K, so finden ein Polynom $f = a_0 + a_1 X + \ldots + \underset{\neq 0}{a_n} X^n \in K[X]$ mit $f(m^{-1}) = 0$

$$\Rightarrow \quad a_0 + a_1 m^{-1} + \ldots + a_n \cdot (m^{-1})^n = 0$$

$$(m^{-1})^{n-1} \cdot \left(a_0 \cdot m^{n-1} + a_1 \cdot m^{n-2} + \ldots + a_n m^{-1}\right) = 0$$

$a \cdot b = 0$
$\Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$

$$\Rightarrow a_0 m^{n-1} + a_1 m^{n-2} + \ldots + a_n m^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad m^{-1} = \frac{a_0 m^{n-1} + a_1 m^{n-2} + \ldots + a_{n-1}}{-a_n} \in M$$

da alle a_i's in K und $m \in M$ und $K \subseteq M$ und M Unterring und K Körper ($\Rightarrow \frac{1}{a_n}$ existiert)

$\Rightarrow M$ Körper ☒

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei $K[X]$ der Polynomring in X über einem Körper K, es sei $Y = X^2$ und $Z = X^3$. Zeigen Sie, dass der Ring $K[Y, Z]$ nicht faktoriell ist.

In einem faktoriellen Ring R gilt:
$\forall\, 0 \neq r \notin R^\times$:
r irreduzibel $\Rightarrow$ r prim

$0 \neq f \notin K[Y,Z]^\times$
f irreduzibel $:\Leftrightarrow$
$\forall g, h \in K[Y,Z]: f = g \cdot h \Rightarrow g \in K[Y,Z]^\times$ oder $h \in K[Y,Z]^\times$

$0 \neq f \notin K[Y,Z]^\times$
f prim $:\Leftrightarrow$ $\forall g, h \in K[Y,Z]: f \mid g \cdot h$
$\Rightarrow f \mid g$ oder $f \mid h$

Wir zeigen: $\exists f \in K[\overset{X^2}{Y}, \overset{X^3}{Z}]$ mit
f irreduzibel und f nicht prim ($\Rightarrow K[Y,Z]$ nicht faktoriell)

$f := X^3 + X^2$ irreduzibel ✓

$(X^3 + X^2) \mid g \cdot h$

aber $X^3 + X^2 \nmid g$ und $X^3 + X^2 \nmid h$

g und h musst du finden!