Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei R ein faktorieller Ring, $p \in R$ mit $0 \neq p \notin R^\times$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) p ist irreduzibel (prim),

(ii) $\forall\, a, b \in R:\ (p \mid ab \Rightarrow p \mid a \text{ oder } p \mid b)$,

(iii) (p) ist Primideal.

$\underline{(iii) \Rightarrow (ii)}$: Sei also (p) ein Primideal, d.h.

$\forall a, b \in R: \quad a \cdot b \in \underset{= \{x \cdot p \mid x \in R\}}{(p)} \Rightarrow a \in (p) \vee b \in (p)$.

Sei $a, b \in R$ mit $p \mid a \cdot b$, d.h.

wir finden $x \in R$ mit $p \cdot x = a \cdot b$.

$\Rightarrow a \cdot b \in (p) \Rightarrow a \in (p)$ oder $b \in (p)$

$\Rightarrow \exists x_1 \in R$ mit $x_1 \cdot p = a$ oder $\exists x_2 \in R$ mit $x_2 \cdot p = b$

$\Rightarrow p \mid a$ oder $p \mid b$

$\Rightarrow p$ prim

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei R ein faktorieller Ring, $p \in R$ mit $0 \neq p \notin R^\times$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) p ist irreduzibel ~~(prim)~~,

(ii) $\forall\, a, b \in R:\ (p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ oder $p \mid b)$, (prim)

(iii) (p) ist Primideal.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es gelte also (ii), d.h. p prim

Noch zu zeigen: p irreduzibel, d.h.

$$\forall a,b \in R: \quad a \cdot b = p \Rightarrow a \in R^\times \text{ oder } b \in R^\times$$

Beweis: Sei $a, b \in R$ mit $a \cdot b = p$.

$$\Rightarrow p \cdot 1 = a \cdot b \Rightarrow p \mid a \cdot b \xRightarrow{p \text{ prim}} p \mid a \text{ oder } p \mid a$$

$$\Rightarrow \exists x \in R \text{ mit } p \cdot x = a \quad \text{oder } p \cdot x = b$$

O.E.d.A. finden wir $x \in R$ mit $p \cdot x = a$.

$$\Rightarrow p = a \cdot b = p \cdot x \cdot b$$

$$\Rightarrow p = p \cdot x \cdot b$$

$$\Rightarrow p - p \cdot x \cdot b = 0$$

$$\Rightarrow p \cdot (1 - x \cdot b) = 0$$

R Integritätsbereich
$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$

$$\xRightarrow{p \neq 0} 1 - x \cdot b = 0$$

$$\Rightarrow x \cdot b = 1$$

$$\Rightarrow b \in R^\times \quad \blacksquare$$

$$\Rightarrow p \text{ irreduzibel}$$

Noch zu zeigen: (i) $\Rightarrow$ (iii)

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Zeigen Sie: In Hauptidealbereichen sind alle Primideale $\neq 0$ maximal.

Sei R HIB und $\{0\} \neq P \neq R$ ein Primideal.

Da R HIB, so finden $p \in R$ mit $P = (p)$.

Angenommen es gäbe Ideal J mit $(p) \subseteq J \subseteq R$.

Noch zu zeigen: $J = R$ oder $J = (p)$. ($\Rightarrow (p)$ maximal)

Da R HIB, so finden wir $a \in R$ sodass $(a) = \{r \cdot a \mid r \in R\} = J$.

Da $(p) \subseteq (a)$, so ist $p \in (a) \Rightarrow$ Wir finden $x \in R$ sodass $a \cdot x = p$

$\Rightarrow a \cdot x = p \cdot 1$

$\Rightarrow a \cdot x \in (p)$

$\Rightarrow a \in (p)$ oder $x \in (p)$

(p) Primideal

1. Fall $a \in (p)$

$\Rightarrow (a) = (p)$ ✓ $\Rightarrow J = (p)$

2. Fall $x \in (p) = \{y \cdot p \mid y \in R\}$

$\Rightarrow$ Wir finden $y \in R$ sodass $y \cdot p = x$

$a \cdot x = p$

$a \cdot y \cdot p = p$

$0 = p - a \cdot y \cdot p$

$0 = p \cdot (1 - a \cdot y)$

R Integritätsbereich

$\Rightarrow 1 - a \cdot y = 0$

$p \neq 0$ (da $P \neq \{0\}$)

$\Rightarrow a \cdot y = 1$

$\Rightarrow a \in R^{\times}$

$\Rightarrow (a) = \{r \cdot a \mid r \in R\} = R$ $\boxtimes$

Beweis:

„$\supseteq$" Sei $r \in R$.

$r = r \cdot 1 = r \cdot a^{-1} \cdot a \in (a)$

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei R ein Hauptidealbereich und S ein Integritätsbereich, welcher R als Unterring enthält. Zeigen Sie, dass ein ggT zweier Elemente $a, b \in R$ auch ggT in S von a, b ist.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

$r = r \cdot 1 = r \cdot a^{-1} a \in (a)$

Sei R ein Hauptidealbereich und S ein Integritätsbereich, welcher R als Unterring enthält. Zeigen Sie, dass ein ggT zweier Elemente $a, b \in R$ auch ggT in S von a, b ist.

Sei $a, b \in R$ und $d \in ggT(a,b)$ in R, d.h.

$d \mid_R a$ und $d \mid_R b$ und $(\forall d' \in R : d' \mid_R a$ und $d' \mid_R b \Rightarrow d' \mid_R d)$

Noch zu zeigen: $d \in ggT(a,b)$ in S, d.h.

$d \mid_S a$ und $d \mid_S b$ und $(\forall d' \in S : d' \mid_S a$ und $d' \mid_S b \Rightarrow d' \mid_S d)$

Beweis:

Da $d \mid_R a \Rightarrow$ Wir finden $x \in R$ sodass $d \cdot x = a$

$\Rightarrow d \mid_S a$ Analog folgt $d \mid_S b$.

$x \in S$, da $R \subseteq S$

Sei nun $d' \in S$ mit $d' \mid_S a$ und $d' \mid_S b$.

Zu zeigen: $d' \mid_S d$

$(a,b) = \{r_1 \cdot a + r_2 \cdot b \mid r_1, r_2 \in R\}$

Da $d' \mid_S a$, so finden wir $x_1 \in S$ sodass $d' \cdot x_1 = a$

und da $d' \mid_S b$, so finden wir $x_2 \in S$ sodass $d' \cdot x_2 = b$.

13.16. Lemma: Sei A HIB, $a, b \in A$, d ein $ggT(a,b)$. Dann: $\exists x, y \in A : d = xa + yb$.

Wegen Lemma 13.16 finden wir $x, y \in R$ sodass $d = x \cdot a + y \cdot b$

$d' \cdot \underset{\in S}{x_1} = a$

$d' \cdot \underset{\in S}{x_2} = b$

$$d' \cdot \overbrace{(x \cdot x_1 + y \cdot x_2)}^{\in S} = x \cdot d' \cdot x_1 + y \cdot d' \cdot x_2 = x \cdot a + y \cdot b = d$$

$\Rightarrow d' \mid_S d$ ∎

miro