Aufgabe 1: Traversierung von Binärbäumen (3 Punkte)

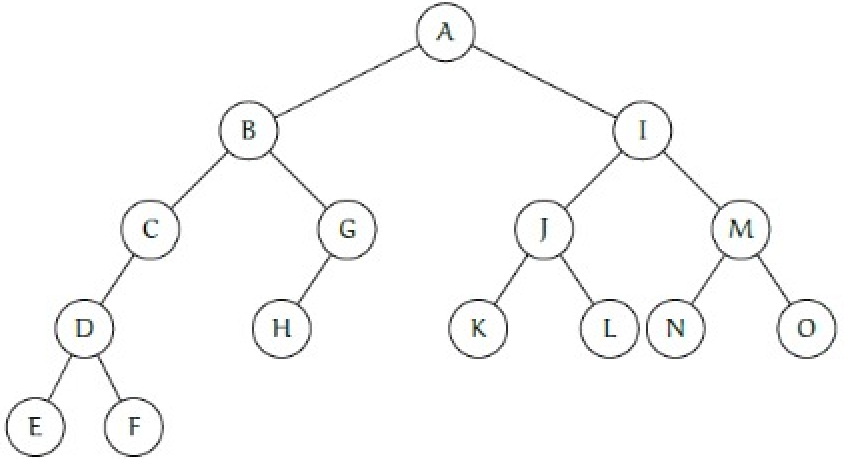
Traversieren Sie folgenden Baum mit der Strategie

(a) Pre-Order (WLR),

(b) In-Order (LWR),

(c) Post-Order (LRW).

Geben Sie jeweils die Reihenfolge der Knoten an, in der diese besucht werden.



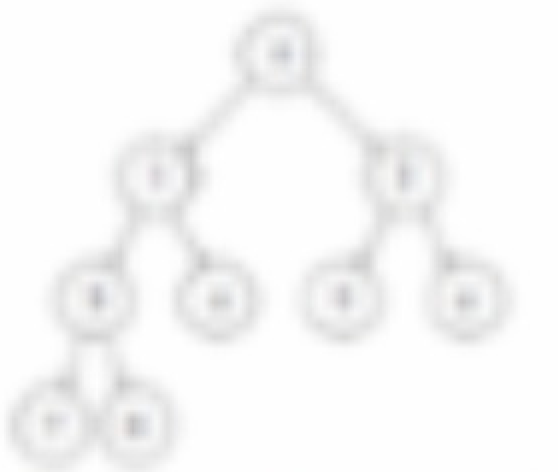
a) A B C D E F G H I J K L M N O

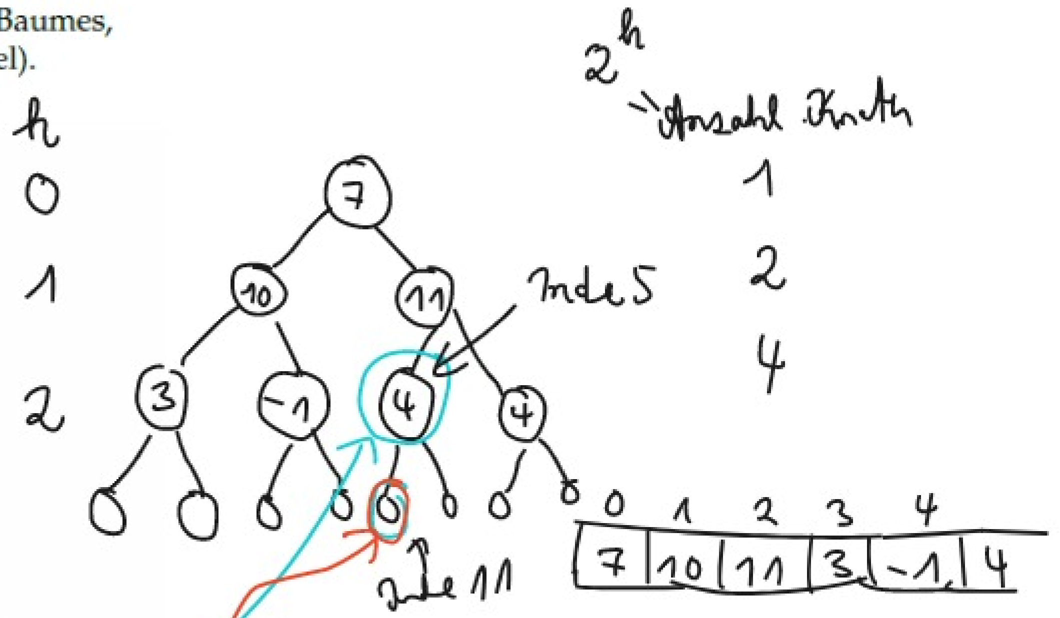
b) E D F C B H G A K J L I N M O

c) E F D C H G B K L J N O M J A

Aufgabe 2: Fast-vollständige Binäre Bäume (3+2 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie die n Knoten eines fast-vollständigen binären Baumes auf ein Feld der Länge n abgebildet werden können. Dabei wurden die Knoten des Baumes, bei 0 beginnend, schichtweise von links nach rechts durchnummeriert (siehe Beispiel).





Wie viele Knoten sind auf den Ebenen $\leq h$?

$$2^0+2^1+2^2+\dots+2^h = \sum_{k=0}^{h} 2^k = \frac{2^{h+1}-1}{2-1} = 2^{h+1}-1$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}}$$

← nicht zur Aufgabe

2. Höhe und 3. Spalte

$2^0+2^1+2^2-1$

$2^0+2^1+2^2+(3-1)\cdot 2 - 1$

Sei v ein Knoten auf Höhe und h und Spalte s.

Index von v: $2^0+2^1+\dots+2^{h-1}+s-1 =: i$

Beispiel: $h=2$, $s=3$

$1+2+3-1=5$ ✓

Index von linken Kind von v: $2^0+2^1+2^2+\dots+2^h+(s-1)\cdot 2 = \text{left}(i)$

$1+2+4+2\cdot 2 = 11$ ✓

$$\text{left}(i) = 2^0 + 2\cdot(2^0+2^1+\dots+2^{h-1}) + 2\cdot(s-1)$$

$$= 2^0 + 2\cdot\underbrace{(2^0+2^1+\dots+2^{h-1}+s-1)}_{=i}$$

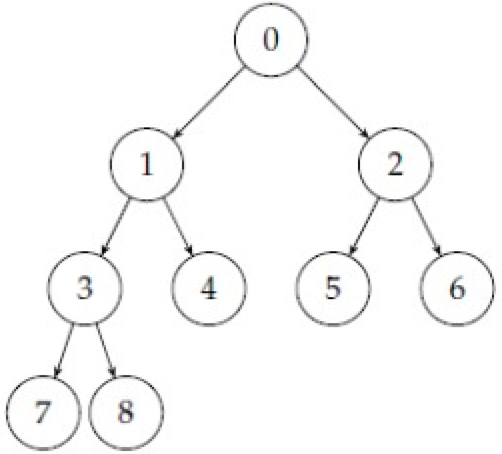
$$= 1 + 2\cdot i$$

$\Rightarrow \text{left}(i) = 1+2i$

Index von rechten Kind v: $\text{left}(i)+1 = 1+2i+1 = 2+2i$

Wenn left(i) und right(i) überhaupt existiert!

b)



Beweisen Sie die folgenden Sätze im Zusammenhang mit fast-vollständigen Binärbäumen:

(a) Wenn i der Index eines Knotens ist, so ist *left*(i) = 2i + 1 der Index des linken Kindes und *right*(i) = 2i + 2 der Index des rechten Kindes (sofern diese existieren).

(b) Nur Knoten mit einem Index i im Bereich $0 \leqslant i \leqslant \lfloor n/2 \rfloor - 1$ haben Kinder.

Gauß-Klammer

$\lfloor x \rfloor$ = die größte ganze Zahl, die kleiner ist als x

$\lfloor 5,7 \rfloor = 5$

$\lfloor 5,5 \rfloor = 5$

$n \in \mathbb{N}$

$$\lfloor n/2 \rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{n}{2} - \frac{1}{2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\geq \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$$

n = Anzahl Knoten Widerspruchsbeweis:

Angenommen der Knoten mit Index $\lfloor n/2 \rfloor$ hätte noch Kinder.

Das linke Kind hätte Index $left(\lfloor n/2 \rfloor) \overset{a)}{=} 1 + 2 \cdot \lfloor n/2 \rfloor \geq$

$$\geq 1 + 2 \cdot \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 1 + n - 1 = n$$

Widerspruch, weil höchste Index n-1 !