1. **10 Punkte** Gebt für folgende Rekursionsgleichungen eine geschlossene Form in Θ-Notation an und zeigt die Korrektheit per Induktion.

(a) $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + 1$

(b) $T(n) = 3T(\frac{n}{5}) + n\log(n)$

a) $T(\underset{4^0}{1})$

$T(4) = 2 \cdot T(1) + 1$

$T(4^2) = 2 \cdot T(4) + 1$

$= 2 \cdot (2 \cdot T(1) + 1) + 1$

$= 2^2 \cdot T(1) + 2 + 1$

$T(4^3) = 2 \cdot T(4^2) + 1$

$= 2 \cdot (2^2 \cdot T(1) + 2 + 1) + 1$

$= 2^3 \cdot T(1) + 2^2 + 2 + 1$

$T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{4}) + 1$

$T(4^4) = 2 \cdot T(4^3) + 1$

$= 2 \cdot (2^3 \cdot T(1) + 2^2 + 2 + 1) + 1$

$= 2^4 \cdot T(1) + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$

$T(4^5) = 2^5 \cdot T(1) + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + \underset{2^0}{1}$

$T(4^n) = 2^n \cdot T(1) + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^1 + 2^0$

$= 2^n \cdot T(1) + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i =$

$= 2^n \cdot T(1) + \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n T(1) + 2^n - 1$

$= 2^n(T(1) + 1) - 1$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Geometrische Summenformel}\\ \forall q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}: \\ \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \\ \text{Beweis: mit Induktion}\end{array}}$

Beh.:

$\forall n \in \mathbb{N}_0: \underbrace{T(4^n)}_{LS} = \underbrace{2^n \cdot (T(1) + 1) - 1}_{RS} \quad =: A(n)$

$\forall n \in \mathbb{N}_0: A(n) \equiv$

$\underbrace{A(0)}_{\text{Induktionsanfang (IA)}} \wedge (\forall n \in \mathbb{N}_0: \underbrace{A(n)}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} \Rightarrow \underbrace{A(n+1)}_{\text{Induktionsschritt}})$

IA $n=0$

$LS = T(4^0) = T(1)$

$RS = 2^0 \cdot (T(1) + 1) - 1$

$= 1 \cdot (T(1) + 1) - 1 = T(1) + 1 - 1 = T(1)$

$\Rightarrow LS = RS$

IV Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $A(n)$, d.h.

$T(4^n) = 2^n \cdot (T(1) + 1) - 1$

IS: Zu zeigen: $A(n+1)$, d.h.

$\underbrace{T(4^{n+1})}_{LS} = \underbrace{2^{n+1} \cdot (T(1) + 1) - 1}_{RS}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$\frac{4^{n+1}}{4} = 4^{n+1-1} = 4^n$ $\quad 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

$2 \cdot 2^n \neq 4^n$

$LS = T(4^{n+1}) = 2 \cdot T(\frac{4^{n+1}}{4}) + 1 = 2 \cdot T(4^n) + 1 \overset{IV}{=}$

$\boxed{T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{4}) + 1}$

$= 2 \cdot (2^n (T(1) + 1) - 1) + 1$

$= 2^{n+1} \cdot (T(1) + 1) - 2 + 1 =$

$= 2^{n+1} \cdot (T(1) + 1) - 1 = RS$ ∎

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}_0: T(4^k) = 2^k \cdot (T(1) + 1) - 1$

$2^k = \sqrt{4^k}$

$T(\underset{4^k}{n}) = \sqrt{4^k} \cdot (T(1) + 1) - 1$

$= \sqrt{n} \cdot (T(1) + 1) - 1 \in \Theta(\sqrt{n})$

miro

$T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{4}) + 1$

$T(1)$
$T(4)$
$T(4^2)$

(b) $T(n) = 3T(\frac{n}{5}) + n\log(n)$

$T(n) = 3 \cdot T(n-5) + n$

$T(0)$
$T(5)$
$T(10)$
$T(15)$

$T(1)$

$T(5) = 3 \cdot T(1) + 5 \cdot \log(5)$

$T(5^2) = 3 \cdot T(5) + 5^2 \cdot \log(5^2)$

$= 3 \cdot (3 \cdot T(1) + 5 \cdot \log(5)) + 5^2 \cdot \log(5^2) =$

$= 3^2 \cdot T(1) + 3 \cdot 5 \cdot \log(5) + 5^2 \cdot \log(5^2)$

$T(5^3) = 3 \cdot T(5^2) + 5^3 \cdot \log(5^3)$

$= 3 \cdot (3^2 \cdot T(1) + 3 \cdot 5 \cdot \log(5) + 5^2 \log(5^2)) + 5^3 \cdot \log(5^3)$

$= 3^3 \cdot T(1) + 3^2 \cdot 5 \cdot \log(5) + 3 \cdot 5^2 \cdot \log(5^2) + 5^3 \cdot \log(5^3)$

$T(5^4) = 3^4 \cdot T(1) + 3^3 \cdot 5 \cdot \log(5) + 3^2 \cdot 5^2 \cdot \log(5^2) + 3 \cdot 5^3 \cdot \log(5^3) + 5^4 \cdot \log(5^4)$

$\log(a^b) = b \cdot \log(a)$

Beh.: $A(k) :=$ $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \underbrace{T(5^k)}_{LS} = 3^k \cdot T(1) + \sum_{i=0}^{k-1} 3^i \cdot \underbrace{5^{k-i}}_{=5^k \cdot 5^{-i} = 5^k \cdot \frac{1}{5^i}} \cdot \log(5^{k-i}) =$

$= 3^k \cdot T(1) + 5^k \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{3}{5}\right)^i \cdot (k-i) \cdot \log(5)$

$= \underbrace{3^k \cdot T(1) + 5^k \cdot \log(5) \cdot \left(k \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{3}{5}\right)^i - \sum_{i=0}^{k-1} i \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^i\right)}_{RS}$

Beweis mit Induktion

IA $k=0$

$LS = T(5^0) = T(1)$

$RS = 3^0 \cdot T(1) + 5^0 \cdot \log(5) \cdot \underbrace{\left(0 \cdot \sum \ldots - \underbrace{\sum_{i=0}^{-1} \ldots}_{=0}\right)}_{=0}$

$= 3^0 \cdot T(1) = 1 \cdot T(1) = T(1)$

$\Rightarrow LS = RS$ ✓

IV Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $A(k)$

IS: Zu zeigen: $A(k+1)$

$LS = T(5^{k+1}) = 3 \cdot T\left(\frac{5^{k+1}}{5}\right) + 5^{k+1} \cdot \log(5^{k+1}) =$

$\boxed{T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{5}\right) + n \cdot \log(n)}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$= 3 \cdot T(5^k) + 5^{k+1} \cdot \log(5^{k+1})$

$= 3 \cdot \left(3^k \cdot T(1) + 5^k \cdot \log(5) \cdot \left[k \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{3}{5}\right)^i - \sum_{i=0}^{k-1} i \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^i\right]\right) + 5^{k+1} \cdot \log(5^{k+1})$

$3 \cdot 5^k \neq 15^k$

$3^k \cdot 5^k = 15^k$

$3 \cdot 3^k \neq 9^k$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$

$= 3^{k+1} \cdot T(1) +$

einfache Rechnung

$= 3^{k+1} \cdot T(1) + 5^{k+1} \cdot \log(5) \cdot \left[(k+1) \cdot \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{3}{5}\right)^i - \sum_{i=0}^{k} i \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^i\right]$ ☒

d.h. $\forall k \in \mathbb{N}_0 : T(5^k) = 3^k \cdot T(1) + 5^k \cdot \log(5) \cdot \left[k \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{3}{5}\right)^i}_{= \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^k}{1 - \frac{3}{5}}} - \sum_{i=0}^{k-1} i \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^i\right]$

$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$

$\in \Theta(5^k \cdot k)$

$\underset{5^k}{T(n)} \in \Theta(n \cdot \log_5(n)) = \Theta\left(n \cdot \frac{\log_2(n)}{\log_2(5)}\right) = \Theta(n \cdot \log_2(n))$ ☒

$5^k = n \quad | \log_5(\,)$

$k = \log_5(n)$

$\boxed{\text{Basiswechselsatz} \quad \log_a(c) = \frac{\log_b(c)}{\log_b(a)}}$

miro

Mastertheorem

Seien $a \geq 1, b > 1$ Konstanten, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$.

- Wenn $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$, dann gilt

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}).$$

- Wenn $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, dann gilt

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n).$$

- Wenn $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$, und $af(n/b) \leq cf(n)$ für eine Konstante $c < 1$ und alle hinreichend großen n, dann gilt

$$T(n) \in \Theta(f(n)).$$

$$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{5}\right) + \underbrace{n \cdot \log(n)}_{= f(n)}$$

$a = 3 \quad b = 5 \quad f(n)$

$\log_b(a) = \log_5(3) < 1$

$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n \cdot \log n)$