kein > mehr

1. **Übung zum logischen Schließen mit Quantoren.** Beweisen Sie, dass für alle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ gilt:

$$\underbrace{(\forall \epsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}_0\ \forall n > m :\ |a_n| \leq \epsilon)}_{(*)} \Rightarrow (\forall \epsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m :\ |a_n| < \epsilon)$$

0 fehlt

kein ≤ mehr

Es sei also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge, für die $(*)$ gilt.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Wegen $(*)$ finden wir $m' \in \mathbb{N}_0$ sodass $\forall n > m'$: $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{100}$

Wähle $m := m' + 1$

$n \geq m = m'+1 > m'$

Dann gilt $\forall n \geq m$: $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{100} < \varepsilon$ ∎

Man auch die Äquivalenz zeigen von

i) $a_n \to a$

ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ |a_n - a| < \varepsilon$

iii) $\forall M \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ |a_n - a| < \frac{1}{M}$

iv) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N:\ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{100}$

v) $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N:\ |a_n - a| < \varepsilon$