3. Eine Riemannsumme zur Quadratfunktion. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}$$

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie hierzu die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Induktion:

$$\left(\forall n\in\mathbb{N} : A(n)\right) \Leftarrow \left(\underset{\text{Induktionsanfang}}{A(1)} \wedge \left(\underset{\text{Induktionsvoraussetzung}}{\forall n\in\mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n+1)}\right)\right)$$

Beh.: $\forall n\in\mathbb{N}: \underbrace{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{LS} = \underbrace{\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}}_{RS}}_{A(n)}$

Induktionsanfang $n=1$:

$$LS = \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$$

$$RS = \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \checkmark$$

$\Rightarrow LS = RS \checkmark$

Induktionsvoraussetzung:
Sei $n\in\mathbb{N}$ und es gelte $A(n)$, d.h. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

Induktionsschritt: z.z.: $A(n+1)$, d.h. $\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} k^2}_{LS} = \underbrace{\frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)}{6}}_{RS}$

$$LS = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 \overset{IV}{=} \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + n^2 + 2n + 1$$

$$= \frac{1}{3} n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \frac{13}{6} n + 1$$

$$RS = \frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6} = \frac{1n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3} + \frac{1n^2 + 2n + 1}{2} + \frac{1n + 1}{6}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot n^3 + \left(\frac{3}{3} + \frac{1}{2}\right) n^2 + \left(\frac{3}{3} + \frac{2}{2} + \frac{1}{6}\right) n + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{3} n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \frac{13}{6} n + 1 = LS \checkmark$$

$$\boxed{\text{Binomische Formel} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}}$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{3} \cdot a^3 \cdot b^0 + \binom{3}{2} \cdot a^2 \cdot b^{3-2} + \binom{3}{1} \cdot a \cdot b^{3-1} + \binom{3}{0} \cdot a^0 \cdot b^3$$

$\binom{3}{3} = 1$, $\binom{3}{2} = 3$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{0} = 1$

$$= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n\right) =$$

$n^2 \cdot n^3 = n^5$

$\frac{n^2}{n^3} = n^{-1} = \frac{1}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 0$$

$$= \frac{1}{3} \blacksquare$$

$a_n \to a$
$b_n \to b$
$a_n + b_n \xrightarrow{n\to\infty} a + b$

$a_n \cdot b_n \xrightarrow{n\to\infty} a \cdot b$
$\delta \cdot a_n \xrightarrow{n\to\infty} \delta \cdot a$