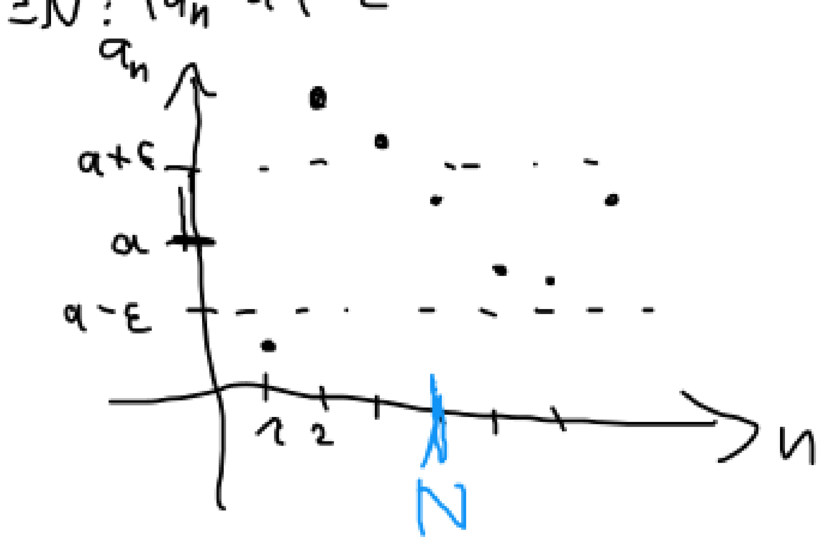
$a_n \to a :\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\ge N: |a_n-a|<\varepsilon$



2. **Vergleich des Wachstums von Potenzfunktionen mit Exponentialfunktionen.**
Beweisen Sie für alle $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$:

$$n^k a^n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Archimedisches Axiom

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}_0 :\ n > x.$$

In Worten:

Jede reelle Zahl wird von mindestens einer natürlichen Zahl übertroffen.

Wir verwenden auch häufig die folgende äquivalente Formulierung des Archimedischen Axioms:

Archimedisches Axiom – Variante

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} :\ \frac{1}{n} < \varepsilon$$

In Worten:

Zu jeder positiven reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es einen kleineren Stammbruch $1/n$, $n \in \mathbb{N}$.

Z.: $n^k a^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, d.h.

$$\forall \varepsilon>0\ \underbrace{\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\ge N}_{n \text{ groß genug}}: \underbrace{|n^k a^n|} < \varepsilon$$

$$= |n^k|\cdot|a^n| =$$

$$= n^k\cdot \underbrace{|a|^n}_{<1} < \varepsilon \quad \text{gdw}$$

$$\sqrt[n]{n^k}\cdot|a| < \sqrt[n]{\varepsilon}$$

$$|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$$

$$|a^n| = |\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{-mal}}| = \underbrace{|a|\cdot|a|\ldots|a|}_{n\text{-mal}} = |a|^n$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (n^k\cdot a^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

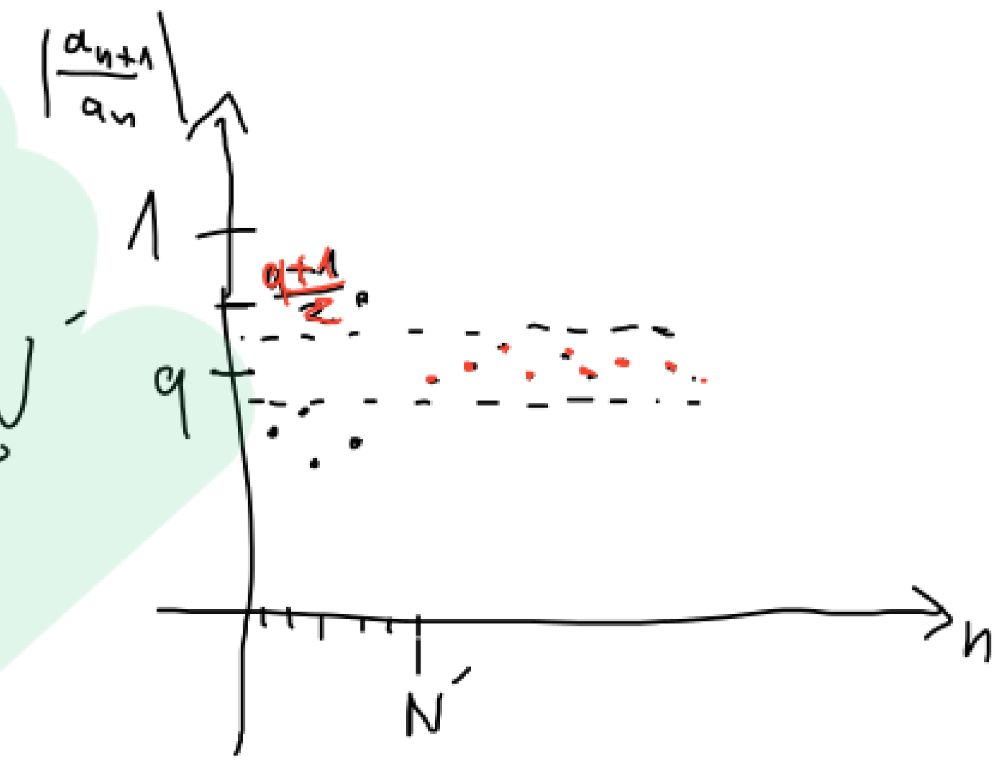
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^k\cdot a^{n+1}}{n^k\cdot a^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k\cdot|a| = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1}\cdot|a| \xrightarrow{n\to\infty} |a| < 1$$

$$\frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: q < 1$$

$\Rightarrow$ Wir finden N' sodass $\underbrace{\forall n \ge N'}_{\text{für } n \text{ groß genug}}$

ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \frac{1+q}{2} < 1$



$$|a_{n+1}| \le \underbrace{\frac{1+q}{2}}_{=:c}\cdot|a_n|$$

$$|a_{N'+1}| \le c\cdot|a_{N'}|$$

$$|a_{N'+2}| \le c\cdot|a_{N'+1}| \le c\cdot c\cdot|a_{N'}| = c^2\cdot|a_{N'}|$$

$$|a_{N'+3}| \le c^3\cdot|a_{N'}|$$

$$|a_{N'+n}| \le \underbrace{c^n}_{<1}\cdot|a_{N'}|$$

Wir wissen jetzt: $\forall n\in\mathbb{N}$: $\underbrace{|a_{N'+n}|}_{(N'+n)^k\cdot a^{N'+n}} \le c^n\cdot\underbrace{|a_{N'}|}_{N'^k\cdot a^{N'}}$ und $0 \le c < 1$

Noch z.: $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\ge N: |a_n| = n^k\cdot a^n < \varepsilon$

Sei $\varepsilon>0$. Wähle N so groß, dass $c^{N-N'}\cdot|a_{N'}| < \varepsilon$. (möglich da $c<1$).

Dann gilt $\forall n \ge N$:

$$|a_n| = |a_{N'+(n-N')}| \le c^{n-N'}\cdot|a_{N'}| \overset{n\ge N}{\le} c^{N-N'}\cdot|a_{N'}| < \varepsilon$$

☒