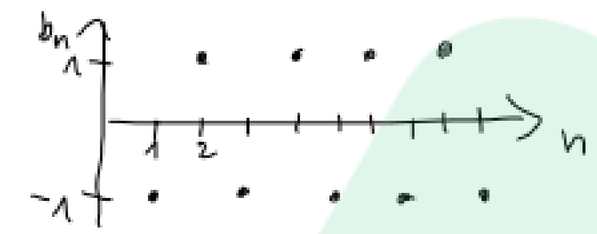
$$\boxed{\begin{matrix} 3^{\frac{1}{2}} \\ \| \\ \sqrt{3} \end{matrix}} \xleftarrow{:2} \begin{matrix} 3^1 \\ \| \\ 3 \end{matrix} \xleftarrow{:2} \begin{matrix} 3^2 \\ \| \\ 9 \end{matrix}$$

$$\sqrt{} \qquad \sqrt{}$$

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad (a^b)^c = a^{b\cdot c}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}^n} \cdot \sqrt{2}^n \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n \cdot \frac{1+n}{n} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n \cdot \frac{1+n}{n}$$



$$2^{-n/2} = \frac{1}{2^{n/2}} = \frac{1}{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt{2}^n}$$

$$a_{8k+2} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{8k+2} \cdot \frac{1+8k+2}{8k+2} = \underbrace{\left(\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^8\right)^k}_{=1} \cdot \underbrace{\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2}_{i} \cdot \underbrace{\frac{1+8k+2}{8k+2}}_{\xrightarrow{k\to\infty} 1} \xrightarrow{k\to\infty} i$$

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

b Häufungspunkt von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$:\Leftrightarrow \exists$ Teilfolge $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$
sodass $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n_k} = b$

1. *Aus der GOP-Nachholklausur des Sommersemesters 2013:*
Gegeben seien eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{C}$ und eine Zahl $b \in \mathbb{C}$.
(a) Definieren Sie, wann b ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genannt wird.
(b) Nun sei
$$a_n = 2^{-n/2}(1+i)^n \frac{1+n}{n} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$
gegeben. Beweisen Sie, dass die imaginäre Einheit i ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Achten Sie dabei besonders auf eine logisch korrekte Darstellung des Beweises.

$$\tan\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$$

$$\boxed{z = |z| \cdot e^{i\varphi}}$$

Euler'sche Form
$\forall x \in \mathbb{R}: e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$

Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} := (2k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$b_{n_k} = b_{2k} = (-1)^{2k} = \left((-1)^2\right)^k = 1^k = 1 \Rightarrow b_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} 1$$

$$(a^b)^c = a^{b\cdot c}$$

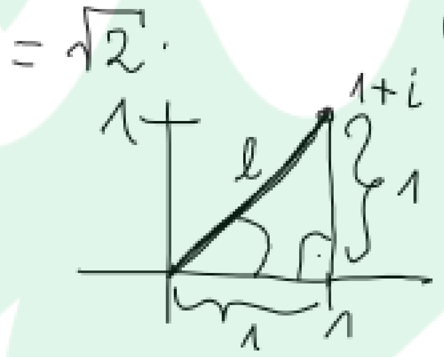
$\Rightarrow 1$ Häufungspunkt von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\frac{1+n}{n} = \frac{1}{n} + \frac{n}{n} = \frac{1}{n} + 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n$$

$$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$|1+i| = \sqrt{2}$$



$$1^2 + 1^2 = l^2$$
$$\sqrt{1^2+1^2} = l$$
$$\sqrt{2} = l$$

Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} := (2k+1)_{k\in\mathbb{N}}$

$$b_{n_k} = b_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = (-1)^{2k} \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) \Rightarrow b_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} -1$$

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$$

$\Rightarrow -1$ Häufungspunkt von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(7 + (-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

HP sind 8 und 6

$$b_{2k} = 8 + \frac{1}{2k} \xrightarrow{k\to\infty} 8 \qquad \frac{1}{2k} \to 0$$

$$b_{2k+1} = 6 + \frac{1}{2k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 6 \qquad \frac{1}{2k+1} \to 0$$

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(4 + (-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

HPe sind 3 und 5

$$b_{2k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 3$$
$$b_{2k} \xrightarrow{k\to\infty} 5$$

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(i^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

HP sind $1, -1, i$ und $-i$

$$i^0 = 1$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1 = i^0 = 1$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$
$$i^6 = -1$$
$$i^7 = -i$$

4

$$b_{4k} = i^{4k} = \left(i^4\right)^k = 1^k = 1 \Rightarrow b_{4k} \xrightarrow{k\to\infty} 1$$

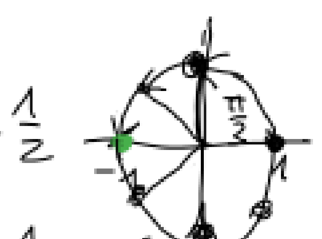
$$b_{4k+1} = i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i^1 = 1 \cdot i = i \Rightarrow b_{4k+1} \xrightarrow{k\to\infty} i$$

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$$

$$b_{4k+2} = 1 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = (-1)$$
$$b_{4k+2} \xrightarrow{k\to\infty} -1$$

$$b_{4k+3} \xrightarrow{k\to\infty} -i$$

$$\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^0 = 1$$
$$\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = e^{2i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$
$$(a^b)^c = a^{b\cdot c} \qquad \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



$$\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = e^{i\frac{3}{4}\pi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = -1$$
$$\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 = -i$$
$$\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^7 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^8 = 1 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^0$$