Aufgabe 2: [7=2+5 Punkte]

a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

b) Man zeige: Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\frac{1}{10}\sin(x+y) &= x\\ \frac{1}{10}\cos(x+y) &= y\end{aligned}$$

besitzt genau eine Lösung (x, y) in $\mathbb{R}^2$.

a) $(M, \|\ \|)$ vollständig normierter Raum,

$f : (M, \|\ \|) \to (M, \|\ \|)$ Kontraktion, d.h. $\exists\, 0 < K < 1$ $\forall x, y \in M$: $\|f(x) - f(y)\| \leq K \cdot \|x - y\|$

$\Rightarrow$ Dann hat f einen Fixpunkt

b) $(M, \|\ \|) = (\mathbb{R}^2, \|\ \|_\infty)$

$\|\ \|_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$

$\|\ \|_\infty : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \max(|x|, |y|)$

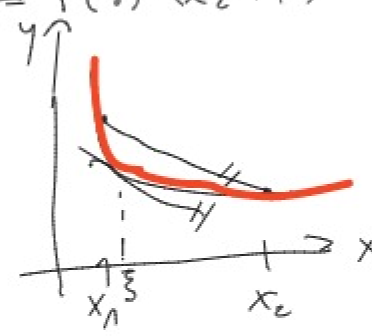
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\frac{1}{10}\sin(x+y)\\ \frac{1}{10}\cos(x+y)\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ Fixpunkt von f $:\Leftrightarrow$ $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\exists \xi$ zwischen x_1 und x_2:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$



$\sin(x_2) - \sin(x_1) = \cos(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$

$$\boxed{\begin{aligned}|\sin(x_2) - \sin(x_1)| &= \underbrace{|\cos(\xi)|}_{\leq 1} \cdot |x_2 - x_1| \\ &\leq |x_2 - x_1| \\ |\cos(x_2) - \cos(x_1)| &= \underbrace{|-\sin(\xi)|}_{\leq 1} \cdot |x_2 - x_1|\end{aligned}}$$

Sei $K := \frac{1}{5} < 1$

Sei $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\left\| f\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \ldots \\ \frac{1}{10}\cos(x_1+y_1) - \frac{1}{10}\cos(x_2+y_2)\end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$\|\delta \cdot x\| = |\delta|\,\|x\|$ Homogenität der Norm

$$= \frac{1}{10} \cdot \max\left\{ |\sin(x_1+y_1) - \sin(x_2+y_2)|, |\cos(x_1+y_1) - \cos(x_2+y_2)| \right\} \leq$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \max\left\{ |x_1+y_1-x_2-y_2|, |x_1+y_1-x_2-y_2| \right\}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot |x_1+y_1-x_2-y_2|$$

$a, b \in \mathbb{R}$

$a + b \leq \max\{a,b\} + \max\{a,b\}$
$= 2 \cdot \max\{a,b\}$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{1}{10}\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\right)$$

$$\leq \frac{1}{10} \cdot 2 \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$$= \underset{\overset{!!}{K}}{\frac{1}{5}} \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = \underset{\overset{!!}{K}}{\frac{1}{5}} \cdot \left\|\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right\|_\infty$$

$\Rightarrow f$ Kontraktion

$\underset{\text{Banach}}{\Rightarrow} f$ hat Fixpunkt

Aufgabe 3: [6 Punkte]
Zeigen Sie: Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \dfrac{1}{10(e^{x-y}+1)} = x, \\[2mm] \dfrac{1}{e^{x+y}+10} = y \end{cases}$$

besitzt genau eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{10(e^{x-y}+1)} \\ \frac{1}{e^{x+y}+10} \end{pmatrix}$$

Wähle $K :=$

Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\left\| f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{10(e^{x_1-y_1}+1)} - \frac{1}{10(e^{x_2-y_2}+1)} \\ \frac{1}{e^{x_1+y_1}+10} - \frac{1}{e^{x_2+y_2}+10} \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= \max\left\{ \frac{1}{10} \cdot \left| \frac{1}{e^{x_1-y_1}+1} - \frac{1}{e^{x_2-y_2}+1} \right|, \left| \frac{1}{e^{x_1+y_1}+10} - \frac{1}{e^{x_2+y_2}+10} \right| \right\}$$

$$\leq \max\left\{ \frac{1}{10} |x_1 - y_1 - x_2 + y_2|, |x_1 + y_1 - x_2 - y_2| \right\}$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \max\left\{ \frac{1}{10}(|x_1 - x_2| + |y_2 - y_1|), \frac{1}{10}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \right\}$$

$$= \frac{1}{10}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \leq \frac{2}{10} \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$$\overset{\frac{1}{5} " }{\leq} K \cdot \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$$\leq \frac{1}{5} \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

Mittelwertsatz

$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \exists \xi$ zwischen x und y sodass

$$g(x) - (y) = g'(\xi) \cdot (x-y)$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{e^x + 1} \qquad g'(x) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)| \cdot |x - y|$$

$$\underbrace{\left| -\frac{e^\xi}{(e^\xi+1)^2} \right|}_{\leq 1} \cdot |x - y|$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{e^x + 10} \qquad h'(x) = -\frac{e^x}{(e^x+10)^2}$$

$$\Rightarrow |h(x) - h(y)| \leq \underbrace{|h'(\xi)|}_{\leq 1} |x - y|$$

$$\frac{x^4}{x^4 + 100} < 1$$

f

F'

T

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \frac{0}{100} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$$

Sei $F = h'$

Wir bestimmen max und min von f

$$\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g'h - g\cdot h'}{h^2}$$

$$F' = h''(x) = \frac{-e^x(e^x+10)^2 + e^x\cdot 2\cdot(e^x+10)\cdot e^x}{(e^x+10)^4} = 0$$

$$F'(x) = 0$$

$$\underbrace{e^x\cdot(e^x+10)}_{>0}\cdot\left[-(e^x+10) + 2e^x\right] = 0$$

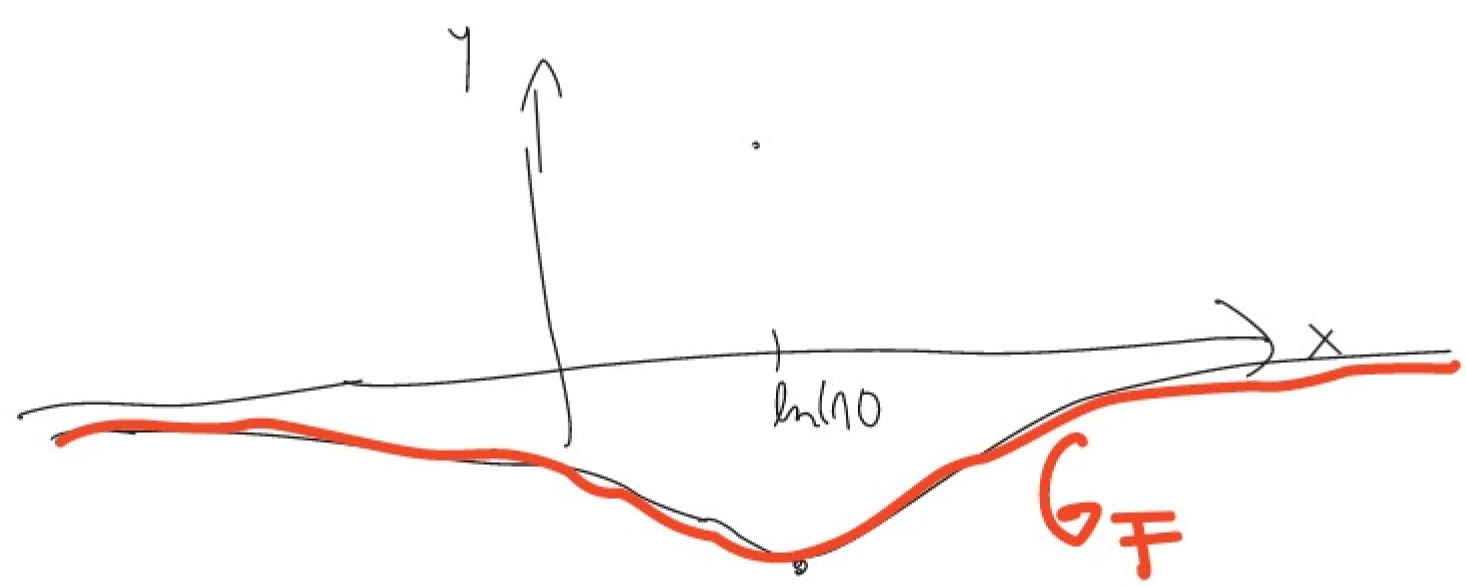
$$-e^x - 10 + 2e^x = 0$$

$$e^x - 10 = 0$$

$$e^x = 10$$

$$\ln e^x = \ln 10$$

$$x = \ln 10$$



$$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}: \quad |h'(x)| \le |h'(\ln 10)|$$

$$= \left| -\frac{e^{\ln 10}}{(e^{\ln(10)}+10)^2} \right|$$

$$= \left| \frac{-10}{(20)^2} \right| = \frac{1}{40}$$

1.6 (5 = 1 + 4 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

(b) Gegeben sei eine glatte Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$k := \sup_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) \right| < 1.$$

Beweisen Sie, dass die Integralgleichung

$$g(x) = \int_0^x f(x, y, g(y))\, dy \quad \text{für } 0 \le x \le 1 \qquad (*)$$

genau eine Lösung $g \in C([0, 1], \mathbb{R})$ besitzt.
Hinweis: Sie können hierbei mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ arbeiten.

$$F : C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R}),\quad g \mapsto F(g) : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^x f(x,y,g(y))\,dy$$

$$F(g) = g \iff g \text{ löst } (*)$$

$$\|F(g_1) - F(g_2)\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} \left\{ \left| \int_0^x f(x,y,g_1(y))\,dy - \int_0^x f(x,y,g_2(y))\,dy \right| \right\}$$

Linearität vom Integral

$$= \max_{x\in[0,1]} \left\{ \left| \int_0^x f(x,y,g_1(y)) - f(x,y,g_2(y))\,dy \right| \right\}$$

Δ-Ungl

$$\le \max_{x\in[0,1]} \left\{ \int_0^x \left| f(x,y,g_1(y)) - f(x,y,g_2(y)) \right| dy \right\}$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\left| \sum_{k=0}^n f(k) \right| \le \sum_{k=0}^n |f(k)|$$

miro