1.6 (5 = 1 + 4 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

(b) Gegeben sei eine glatte Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$k := \sup_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) \right| < 1.$$

Beweisen Sie, dass die Integralgleichung

$$g(x) = \int_0^x f(x,y,g(y))\,dy \quad \text{für } 0 \le x \le 1 \qquad (*)$$

genau eine Lösung $g \in C([0,1],\mathbb{R})$ besitzt.

Hinweis: Sie können hierbei mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ arbeiten.

$$F : C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$$
$$g \longmapsto F(g) : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^x f(x,y,g(y))\,dy$$

$F(g) = g \Leftrightarrow g$ löst $(*)$

$$\|F(g_1) - F(g_2)\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} \left\{ \left| \int_0^x f(x,y,g_1(y))\,dy - \int_0^x f(x,y,g_2(y))\,dy \right| \right\}$$

Linearität von Integral

$$\overset{\text{Linearität von Integral}}{=} \max_{x\in[0,1]} \left\{ \left| \int_0^x f(x,y,g_1(y)) - f(x,y,g_2(y))\,dy \right| \right\}$$

Δ-Ungl.

$$\le \max_{x\in[0,1]} \left\{ \int_0^x |f(x,y,g_1(y)) - f(x,y,g_2(y))|\,dy \right\} \le$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\left(\left|\sum_{k=0}^n f(k)\right| \le \sum_{k=0}^n |f(k)|\right)$$

$$\le \max_{x\in[0,1]} \left\{ \int_0^x k \cdot \underbrace{|g_2(y) - g_1(y)|}_{\le \|g_2-g_1\|_\infty = \sup_{y\in[0,1]} |g_2(y)-g_1(y)|}\,dy \right\}$$

$$\le k \cdot \max_{x\in[0,1]} \left\{ \int_0^1 \|g_2 - g_1\|_\infty\,dy \right\}$$

$$= k \cdot \|g_2 - g_1\|_\infty \cdot \underbrace{\int_0^1 1\,dy}_{=1}$$

$$= \underbrace{k}_{<1} \cdot \|g_2 - g_1\|_\infty$$

$\Rightarrow F$ Kontraktion

$\overset{\text{Banachscher Fixpunktsatz}}{\Rightarrow}$ Behauptung $\blacksquare$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff.bar

$\forall x,y, \ \exists \ x \le \xi \le y$

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)\cdot(y-x)$$

$$f_{x,y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto f(x,y,z)$$

$\Rightarrow \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R} \ \exists \xi$ zwischen z_1 und z_2 sodass

$$f_{x,y}(z_2) - f_{x,y}(z_1) = f'_{x,y}(\xi)\cdot(z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |f(x,y,z_2) - f(x,y,z_1)| = \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial z} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \xi \end{pmatrix} \right|}_{\le k < 1} \cdot |z_2 - z_1|$$

miro

Aufgabe 7: [7 Punkte]

a) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Picard-Lindelöf.

b) Beweisen Sie: Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y' = \frac{1}{2}\cos(xy), \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

besitzt genau eine Lösung $y \in C[0,1]$.

Satz 1.145 (Satz von Picard-Lindelöf) *Gegeben seien ein kompaktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Weiter existiere eine „Lipschitzkonstante" $L \ge 0$, so dass f Lipschitz-stetig im 2. Argument mit der Konstanten L im folgenden Sinne ist:*

$$\forall x \in I\ \forall y, z \in \mathbb{R}^n \quad \|f(x,y) - f(x,z)\| \le L\|y - z\| \qquad (282)$$

mit einer beliebigen Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ für alle } x \in I, \quad y(a) = b \qquad (283)$$

eine eindeutige Lösung $y \in C(I, \mathbb{R}^n)$.

a)

$$y'(x) = \frac{1}{2}\cos(x \cdot y(x))$$

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{mit } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}\cdot\cos(x\cdot y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\sin(x\cdot y)\cdot x$$

Sei $x \in \underbrace{[0,1]}_{=I}$ ← kompakt

$$f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto f(x,y)$$

$\overset{\text{Mittelwertsatz}}{\Rightarrow}$ $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}\ \exists \xi$ zwischen y_1 und y_2

$$|f_x(y_2) - f_x(y_1)| = |f_x'(\xi)| \cdot |y_2 - y_1|$$

$$\Rightarrow |f(x,y_2) - f(x,y_1)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}\right| \cdot |y_2 - y_1|$$

$$= \left|-\frac{1}{2}\underbrace{\sin(x\cdot\xi)}_{\le 1}\cdot x\right| \cdot |y_2 - y_1|$$

$$\le \frac{1}{2}\underbrace{|x|}_{\le 1} \cdot |y_2 - y_1|$$

$$\le \underbrace{\frac{1}{2}}_{=L \leftarrow \text{Lipschitz-Konstante}} |y_2 - y_1| \quad \overset{\text{Picard-Lindelöf}}{\Rightarrow} \text{Behauptung}$$

Aufgabe 5: [6 Punkte]
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y_1' = -y_1 + 2y_2, \quad y_1(0) = 3,$$
$$y_2' = -4y_1 + 5y_2, \quad y_2(0) = 4.$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (*)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Eigenwerte von A mit Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$. Dann ist

$$y(x) = C_1 v_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 v_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n v_n e^{\lambda_n x}$$

ist allgemeine Lsg. von $(*)$.

Beweis:

$$y'(x) = C_1 \cdot v_1 \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n v_n \lambda_n e^{\lambda_n x} = \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k e^{\lambda_k x} v_k$$

$$A \cdot y(x) = A\cdot(C_1 v_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 v_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n v_n e^{\lambda_n x})$$

$$= \sum_{k=1}^n C_k \cdot e^{\lambda_k x} \underbrace{A\cdot v_k}_{=\lambda_k \cdot v_k}$$

$$= \sum_{k=1}^n c_k \cdot \lambda_k \cdot e^{\lambda_k x} \cdot v_k$$

$$\Rightarrow y'(x) = A \cdot y(x)$$

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)\cdot(5-\lambda) + 8$$

$$= -5 + \lambda - 5\lambda + \lambda^2 + 8$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$= (\lambda - 1)\cdot(\lambda - 3)$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 3$$

EV zu λ_1: ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

I) $-x_1 + 2x_2 = x_1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

II) $-4x_1 + 5x_2 = x_2$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A, \underbrace{\lambda_1}_{1}) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1} \right\rangle$$

Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

I) $-x_1 + 2x_2 = 3x_1 \Rightarrow 2x_2 = 4x_1 \Rightarrow x_2 = 2x_1$

II) $-4x_1 + 5x_2 = 3x_2$

$$\mathrm{Eig}(A, \lambda_3) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\rangle$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lsg ist

$$y(x) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{3x}$$

$$y_1(0) = 3 \Rightarrow \text{I)}\ C_1 \cdot 1 \cdot \cancel{e}^0 + C_2 \cdot 1 \cdot \cancel{e}^0 = 3$$

$$y_2(0) = 4 \Rightarrow \text{II)}\ C_1 \cdot 1 \cdot \cancel{e}^1 + C_2 \cdot 2 \cdot \cancel{e}^0 = 4$$

Aufgabe 5: [6 Punkte]
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y_1' = -y_1 + 2y_2, \quad y_1(0) = 3,$$
$$y_2' = -4y_1 + 5y_2, \quad y_2(0) = 4.$$

(III) $C_1 + C_2 = 3 \Rightarrow C_1 = 3 - C_2$

$C_1 + 2C_2 = 4 \overset{\text{(III)}}{\Rightarrow} 3 - C_2 + 2C_2 = 4$

$C_2 = 1$

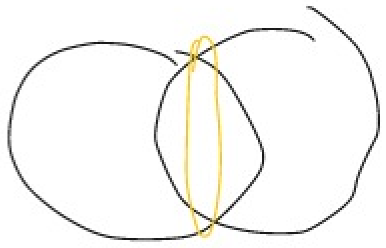
$\Rightarrow C_1 = 2$

$$\Rightarrow y(x) = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{3x}$$

Aufgabe 4: [6 Punkte]
Gegeben sei die Menge $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2+xy+y^2+z^2 = 1\}$. Beweisen Sie: Die Funktion $f: M \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = e^x - e^y + e^{z-y}$, nimmt sowohl ein Minimum als auch ein Maximum als Wert an.

M ist kompakt
und f ist stetig
$\Rightarrow$ f nimmt Minimum und Maximum an!

(a) Beweisen Sie, dass M kompakt ist.
(b) Beweisen Sie, dass M eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.
(c) Formulieren Sie den Satz von den Lagrange-Multiplikatoren.
(d) Berechnen Sie $\max_{(x,y,z)\in M} f(x,y,z)$. Geben Sie auch die Stelle $(x,y,z) \in M$ an, an der dieses Maximum angenommen wird.



d)

1.7 $(10 = 1+3+3+3$ Punkte)

(a) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Stone-Weierstraß.
(b) Zeigen Sie, dass die Menge $M = \{g_\lambda \mid \lambda \geq 0\}$ der Funktionen $g_\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g_\lambda(x) = e^{\lambda x}$, einen bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ dichten Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $C([0,1],\mathbb{R})$ aufspannt.
(c) Gegeben sei eine stetige Funktion $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\phi_f : (C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad \phi_f(g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$
stetig ist.

Lipschitz $\Rightarrow$ glm. St. $\Rightarrow$ stetig

1.7c) Wir zeigen: Φ_f gleichmäßig stetig, d.h.
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall g_1, g_2 \in C([0,1]) : \|g_1 - g_2\|_\infty < \delta \Rightarrow |\Phi_f(g_1) - \Phi_f(g_2)| < \varepsilon$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\int_0^1 |f(x)|\,dx + 100}$

Sei $g_1, g_2 \in C([0,1])$
$$|\Phi_f(g_1) - \Phi_f(g_2)| = \left| \int_0^1 (f(x) \cdot g_1(x) - f(x) g_2(x))\,dx \right|$$
$$= \left| \int_0^1 f(x) \cdot (g_1(x) - g_2(x))\,dx \right| \underset{\substack{\Delta\text{-Ung}\\ \text{Integ.}}}{\leq} \int_0^1 |f(x)| \cdot \underbrace{|g_1(x) - g_2(x)|}_{\leq \sup_{x\in[0,1]} |g_1(x) - g_2(x)| = \|g_1 - g_2\|_\infty} dx$$
$$\leq \int_0^1 |f(x)| \cdot \|g_1 - g_2\|_\infty \, dx$$
$$= \|g_1 - g_2\|_\infty \cdot \int_0^1 |f(x)|\,dx \leq \varepsilon$$

$\delta := \dfrac{\varepsilon}{\int_0^1 |f(x)|\,dx + 100}$