Aufgabe 6: [6=2+4 Punkte]

a) Definieren Sie für eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Aussage "f ist differenzierbar".

b) Zeigen Sie *direkt mit dieser Definition*, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (y^2 - x^2, x^2 - y^2),$$

differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung df.

$$df_x = 2x_1 \cdot dx_1 + (x_2^2 + x_1)\, dx_2$$

a) f ist diff.bar in $x \in \mathbb{R}^n$ $:\Leftrightarrow$ $\exists$ lineare Abbildg $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - L(h) \|_{\mathbb{R}^m}}{\| h \|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

Dann ist $df_x = L$ die Ableitung von f an der Stelle

b)

Behauptg: $df_{\binom{x}{y}}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \mapsto (Df)(x,y) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & 2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2x\,dx + 2y\,dy \\ 2x\,dx + 2y\,dy \end{pmatrix}$$

$$\lim_{\binom{dx}{dy} \to \binom{0}{0}} \frac{\left\| f\begin{pmatrix} x+dx \\ y+dy \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \overset{df_{\binom{x}{y}}\binom{dx}{dy}}{\overset{\shortparallel}{L}}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}}{\left\| \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}} =$$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (y^2 - x^2, x^2 - y^2),$

$$= \lim_{\binom{dx}{dy} \to \binom{0}{0}} \frac{\left\| \begin{pmatrix} (y+dy)^2 - (x+dx)^2 \\ (x+dx)^2 + (y+dy)^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y^2 - x^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2x\,dx + 2y\,dy \\ 2x\,dx + 2y\,dy \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}}{\left\| \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}}$$

$$= \lim_{\binom{dx}{dy} \to \binom{0}{0}} \frac{\left\| \begin{pmatrix} \cancel{y^2} + \cancel{2y\,dy} + (dy)^2 - \cancel{x^2} - \cancel{2x\,dx} - (dx)^2 - \cancel{y^2} + \cancel{x^2} + \cancel{2x\,dx} - \cancel{2y\,dy} \\ \cancel{x^2} + \cancel{2x\,dx} + (dx)^2 + \cancel{y^2} + \cancel{2y\,dy} + (dy)^2 - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} - \cancel{2x\,dx} - \cancel{2y\,dy} \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}}{\left\| \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}}$$

$$= \lim_{\binom{dx}{dy} \to \binom{0}{0}} \frac{\left\| \begin{pmatrix} dy^2 - dx^2 \\ dx^2 + dy^2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}}{\left\| \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}} = \lim_{\binom{dx}{dy} \to \binom{0}{0}} \frac{\max\{|dy^2 - dx^2|, |dx^2 + dy^2|\}}{\max\{|dx|, |dy|\}}$$

$|x-y| \le |x| + |y|$

$$\overset{\Delta\text{-Ung.}}{\le} \quad \text{''} \quad \frac{\max\{|dy^2| + |dx^2|, |dx^2| + |dy^2|\}}{\max\{|dx|, |dy|\}}$$

$a+b \le 2\max\{a,b\}$

$\boxed{|x^2| = |x|^2}$

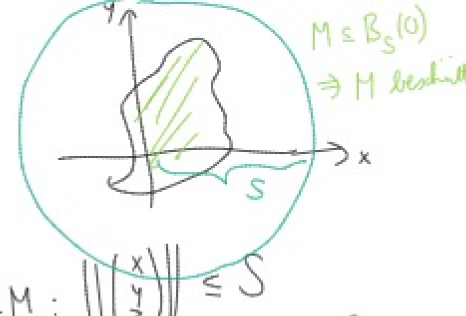
$$= \quad \text{''} \quad \frac{|dx|^2 + |dy|^2}{\max\{|dx|, |dy|\}} \le \lim_{\binom{dx}{dy} \to \binom{0}{0}} \frac{2\overbrace{\max\{|dx|^2, |dy|^2\}}^{(\max\{|dx|, |dy|\})^2}}{\max\{|dx|, |dy|\}}$$

$$= \quad \text{''} \quad \frac{2\left(\max\{|dx|, |dy|\}\right)^{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{\max\{|dx|, |dy|\}}}} = \lim_{\binom{dx}{dy} \to \binom{0}{0}} 2\max\{|dx|, |dy|\} = 0$$

d.h. $\left\| \begin{pmatrix} dx - 0 \\ dy - 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty \to 0$

miro

Aufgabe 4: [6 Punkte]
Gegeben sei die Menge $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + xy + y^2 + z^2 = 1\}$. Beweisen Sie: Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = e^{x} - e^{y} + e^{z-x}$, nimmt sowohl ein Minimum als auch ein Maximum als Wert an.



Zu zeigen: M kompakt $\overset{HB}{\Leftrightarrow}$

1) M abgeschlossen
2) M beschränkt, d.h. $\exists S > 0 \ \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M : \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| \le S$

"$\max\{|x|, |y|, |z|\}$"

zu 2) Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M$. Wähle $S :=$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$2x^2 + xy + y^2 + z^2 =$$
$$= 2 \cdot \left(x^2 + \tfrac{1}{2} xy\right) + y^2 + z^2$$
$$= 2 \cdot \left(\left(x + \tfrac{1}{4} y\right)^2 - \tfrac{1}{16} y^2\right) + y^2 + z^2 =$$
$$= 2 \cdot \left(x + \tfrac{1}{4} y\right)^2 + \tfrac{7}{8} y^2 + z^2 = 1$$

$\boxed{a, b, c \ge 0 \quad a + b + c = 1 \Rightarrow a \le 1 \wedge b \le 1 \wedge c \le 1}$

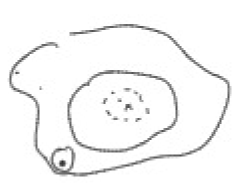
$$\Rightarrow z^2 \le 1 \Rightarrow |z| \le 1$$
$$\tfrac{7}{8} y^2 \le 1 \Rightarrow y^2 \le \tfrac{8}{7} \Leftrightarrow |y| \le \tfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$
$$2 \cdot \left(x + \tfrac{1}{4} y\right)^2 \le 1 \Rightarrow \left(x + \tfrac{y}{4}\right)^2 \le \tfrac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \left|x + \tfrac{1}{4} y\right| \le \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$
$$-\tfrac{1}{\sqrt{2}} \le x + \tfrac{1}{4} y \le \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{7}} \le -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4} y \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4} y \le \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{7}}$$

$y \ge -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

$$\Rightarrow |x| \le \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}}$$

Wähle $S := \max\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}}, 1, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right\}$



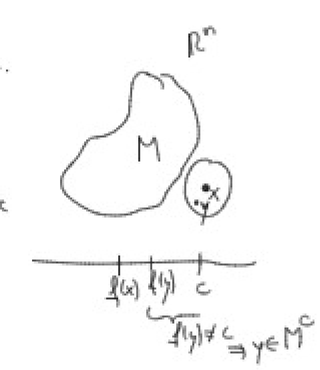
A offen $:\Leftrightarrow$
$\forall x \in A \ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A$

A abgeschlossen $:\Leftrightarrow$
A^c offen

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig in x $:\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$

Allgemein gilt: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in \mathbb{R}$. Dann ist
$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}$ ist abgeschlossen.

Beweis: Zu zeigen: M ist abgeschlossen, d.h.
M^c offen, d.h.
$\forall x \in M^c \ \exists r > 0$ sodass $B_r(x) \subseteq M^c$



Sei $x \in M^c$, d.h. $f(x) \ne c$.
Sei $\varepsilon := \frac{|f(x) - c|}{2} > 0$

$\overset{f \text{ stetig in } x}{\Rightarrow}$ Wir finden $\delta > 0$ s.d. $\|y - x\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \underbrace{\frac{|f(x) - c|}{2}}_{\text{"}\varepsilon\text{"}}$

Wähle $r := \delta$
Sei $y \in B_r(x)$.

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{|f(x) - c|}{2}$$

$$-\frac{|f(x) - c|}{2} < f(y) - f(x) < \frac{|f(x) - c|}{2}$$

$$-\frac{|f(x) - c|}{2} + f(x) < f(y) < \frac{|f(x) - c|}{2} + f(x)$$

1. Fall $f(x) > c$

$$f(y) > \frac{-f(x) + c + 2f(x)}{2}$$

$$f(y) > \frac{f(x) + c}{2} > \frac{2c}{2} = c$$ ✓

2. Fall $f(x) < c$

$$f(y) < \frac{c - f(x) + 2f(x)}{2} = \frac{c + f(x)}{2} < \frac{2c}{2} = c$$ ✓

$\Rightarrow f(y) \ne c \Rightarrow y \in M^c$