4. *(10 Punkte)* Beweisen Sie, dass es genau eine beschränkte stetig differenzierbare Funktion $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ gibt, die die folgenden Gleichungen für alle $x \in]-1,1[$ erfüllt:

$$f(0) = 1, \qquad (3)$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x}{3} \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{3} \cdot f(x)\right) \qquad (4)$$

Satz 1.135 (Banachscher Fixpunktsatz) *Ist $T : M \to M$ eine Kontraktion auf einem nichtleeren vollständigen metrischen Raum (M,d), so besitzt T genau einen Fixpunkt x^*.*

d.h. $\exists\, 0<K<1\ \forall x,y \in M:$
$|T(x)-T(y)| < K \cdot |x-y|$

$$T : C_b^1(]-1,1[) \to C_b^1(]-1,1[)$$
$$f \longmapsto Tf :]-1,1[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1 + \int_0^x \cos\left(\frac{s}{3} \cdot f\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{s}{3} \cdot f(s)\right) ds$$

__Behauptung__: $f \in C_b^1(]-1,1[)$ löst (3) und (4) $\Leftrightarrow$ f Fixpunkt von T (d.h. $Tf = f$)

"$\Leftarrow$" Es gelte also $Tf = f$.

zu 3) $f(0) = Tf(0) = 1 + \int_0^0 \cos(\ldots)\, ds = 1 + 0 = 1$ ✓

zu 4) $f'(x) = (Tf(x))' = \left(1 + \int_0^x \cos\left(\frac{s}{3} \cdot f\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{s}{3} \cdot f(s)\right) ds\right)' =$

$$= \cos\left(\frac{x}{3} \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{3} \cdot f(x)\right) ✓$$

Hauptsatz

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stetig, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^x f(t)\, dt$

Dann gilt

$F'(x) = f(x)$ und $F(x_0) = y_0$

$$\left(\int_{700}^x \sin(t^3)\, dt\right)' = \sin(x^3)$$

"$\Rightarrow$" Es löse $f \in C_b^1(]-1,1[)$ (3) und (4), d.h.
$f(0) = 1$ und $f'(x) = \cos\left(\frac{x}{3} \ldots\right)$

zu zeigen: $Tf(x) = f(x)\ \forall x \in]-1,1[$

$$f(x) \underset{\text{Hauptsatz}}{=} f(0) + \int_0^x f'(s)\, ds \underset{(3)}{=} 1 + \int_0^x f'(s)\, ds =$$

$$\underset{(4)}{=} 1 + \int_0^x \cos\left(\frac{s}{3} \cdot f\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{s}{3} \cdot f(s)\right) ds =$$

$$= Tf(x) ✓$$

miro

Noch zu zeigen: $\forall f \in C_b^1(]-1,1[): Tf \overset{!}{\in} C_b^1(]-1,1[)$

$Tf \in C^1(]-1,1[)$, da

$Tf'(x) = \left(1+\int_0^x \cos(\dots)\,ds\right)' \underset{\uparrow \text{ Hauptsatz}}{=} \cos\left(\frac{x}{3}\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{3}\cdot f(x)\right)$ ist stetig, da cos und f stetig und Verkettung stetiger Fktn stetig

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Δ- Ungl.

$|x+y| \le |x|+|y|$

$a\le b$, $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

Da f beschränkt, so finden $S>0$ sodass $|f(x)|\le S \quad \forall x\in]-1,1[$.

$$|Tf(x)| = \left|1+\int_0^x \cos\left(\frac{s}{3}f\left(\frac{s}{2}\right)+\frac{s}{3}f(s)\right)ds\right| \underset{\uparrow \text{ Δ- Ungl.}}{\le} 1+\left|\int_0^x \cos\left(\frac{s}{3}f\left(\frac{s}{2}\right)+\frac{s}{3}f(s)\right)ds\right|$$

$$\begin{cases} \le 1+\int_0^x |\cos(\dots)|\,ds \le 1+\int_0^x 1\,ds = 1+x \overset{x\le 1}{\le} 1+1=2 & \text{für } x\ge 0 \\ = 1+\left|-\int_x^0 \cos(\dots)\,ds\right| \underset{\substack{\uparrow \\ |-t|=|t| \\ \forall t\in\mathbb{R}}}{=} 1+\left|\int_x^0 \cos(\dots)\,ds\right| \underset{\uparrow \text{ Δ-Ungl.}}{\le} 1+\int_x^0 |\cos(\dots)|\,ds \le 1+\int_x^0 1\,ds = 1-x \underset{\substack{\uparrow \\ x\ge -1}}{\le} 1-(-1)=2 & \text{für } x<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow Tf \in C_b^1(]-1,1[)$ ✓

$C_b^1(]-1,1[)$ ist vollständiger, metrischer Raum

mit $\|f\| = \sup_{x\in]-1,1[} |f(x)|$ und $d(f,g)=\|f-g\|$.

Zu zeigen: T Kontraktion, d.h. $\exists\, 0<K<1$

sodass $\forall f,g \in C_b^1(]-1,1[)$

$$\|Tf-Tg\| < K\cdot\|f-g\|$$

$$\| Tf - Tg \| \le K \| f - g \|$$

Sei $f, g \in C_b^1(]-1,1[)$

$$\| Tf - Tg \| = \sup_{x \in]-1,1[} | Tf(x) - Tg(x) |$$

$$= \sup_{x \in]-1,1[} \left| 1 + \int_0^x \cos\left(\tfrac{s}{3} f\left(\tfrac{s}{2}\right) + \tfrac{s}{3} f(s)\right) ds - 1 - \int_0^x \cos\left(\tfrac{s}{3} g\left(\tfrac{s}{2}\right) + \tfrac{s}{3} g(s)\right) ds \right|$$

$$= \sup_{x \in]-1,1[} \underbrace{\left| \int_0^x \cos\left(\tfrac{s}{3} f\left(\tfrac{s}{2}\right) \ldots\right) - \cos\left(\tfrac{s}{3} g\left(\tfrac{s}{2}\right) \ldots\right) ds \right|}_{A(x)} \le \underbrace{\tfrac{1}{3}}_{= K} \cdot \| g - f \|$$

Mittelwertsatz

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff.bar

$\forall x, y \in \mathbb{R} \ \exists \xi$ zwischen x und y

sodass $f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot (y - x)$

$\Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\cos(y) - \cos(x)| \underset{\substack{\text{für ein } \xi \text{ zwischen} \\ x \text{ und } y}}{=} \overbrace{|-\sin(\xi)|}^{\le 1} \cdot |y - x| \le |y - x|$$

1. Fall $x \ge 0$

$$A(x) \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} \int_0^x \left| \cos\left(\tfrac{s}{3} f\left(\tfrac{s}{2}\right) \ldots\right) - \cos\left(\tfrac{s}{3} g\left(\tfrac{s}{2}\right) \ldots\right) \right| ds \le$$

$$\le \int_0^x \left| \tfrac{s}{3} g\left(\tfrac{s}{2}\right) + \tfrac{s}{3} g(s) - \tfrac{s}{3} f\left(\tfrac{s}{2}\right) - \tfrac{s}{3} f(s) \right| ds$$

$$\le \int_0^x \tfrac{s}{3} \cdot \left| g\left(\tfrac{s}{2}\right) - f\left(\tfrac{s}{2}\right) + g(s) - f(s) \right| ds \le$$

$$\underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} \int_0^x \tfrac{s}{3} \cdot \left(\underbrace{\left| g\left(\tfrac{s}{2}\right) - f\left(\tfrac{s}{2}\right) \right|}_{\le \sup_{x \in]-1,1[} |g(x) - f(x)| = \|g - f\|} + \underbrace{|g(s) - f(s)|}_{\le \|g - f\|} \right) ds \le \int_0^x \tfrac{s}{3} \cdot 2 \cdot \|g - f\| \, ds$$

$$= \tfrac{2}{3} \cdot \|g - f\| \cdot \int_0^x s \, ds = \tfrac{2}{3} \cdot \|g - f\| \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{x^2}_{\le 1, \text{ da } x \in]-1,1[} = \tfrac{1}{3} \cdot \|g - f\|$$

$$\underset{\tfrac{1}{3} = }{K} < 1$$