$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^7+10\right)^{100}\right) = 100\cdot\left(x^7+10\right)^{99}\cdot 7\cdot x^6$$

$$(g\circ f)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}x^2y\\z^3+x\end{pmatrix} = \left(x^2y\right)^2+\left(z^3+x\right)^3$$

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 4x^3y^2+3\cdot\left(z^3+x\right)^2\cdot \underbrace{1}_{\left(z^3+x\right)'}$$

3. *(10= 1+9 Punkte)* Gegeben seien drei Banachräume $(U,\|\cdot\|_U)$, $(V,\|\cdot\|_V)$ und $(W,\|\cdot\|_W)$ sowie zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f: U\to V$ und $g: V\to W$.

(a) Welchen Typ hat die zweite Ableitung $d^2f = d(df)$, also die Ableitung der Ableitung von f? Mit anderen Worten gesagt: Welche Mengen A, B sind der Definitionsbereich A bzw. der Zielbereich B der zweiten Ableitung
$d^2f: A\to B$?

(b) Drücken Sie die zweite Ableitung $d^2(g\circ f)$ der Komposition $g\circ f$ mit Hilfe der ersten und zweiten Ableitungen df, dg, d^2f und d^2g aus. Begründen Sie Ihr Ergebnis mit einer Rechnung.
Variante: Wenn Sie eine vereinfachte Variante dieser Teilaufgabe bearbeiten wollen, nehmen Sie den Spezialfall $U=\mathbb{R}^m$, $V=\mathbb{R}^n$, $W=\mathbb{R}$, also $f=(f_1,\dots,f_n):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mit $m,n\in\mathbb{N}$ und drücken Sie die Hessematrix $D^2(g\circ f)$ mit Hilfe der ersten und zweiten partiellen Ableitungen von g und den f_j, $j=1,\dots,n$, aus. Wenn Sie nur diesen Spezialfall bearbeiten, sind noch 7 der 9 Punkte dieser Teilaufgabe erreichbar.

$g\circ f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

Beispiel

$m=3 \quad n=2:$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^2y\\z^3+x\end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x^2+y^3$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2x$$

$$\frac{\partial y}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 3y^2$$

$$g\circ f: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$$

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x}\left(f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \frac{\partial g}{\partial y}\left(f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 2\cdot x^2y\cdot 2xy + 3\cdot\left(z^3+x\right)^2\cdot 1$$

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x}\left(f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \frac{\partial g}{\partial y}\left(f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 2\cdot x^2\cdot y\cdot x^2 + 3\cdot\left(z^3+x\right)^2\cdot 0$$

$$D^2(g\circ f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2(g\circ f)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2(g\circ f)}{\partial x_2\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2(g\circ f)}{\partial x_m\partial x_1} \\ \frac{\partial^2(g\circ f)}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2(g\circ f)}{\partial x_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\partial^2(g\circ f)}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_2}\right)$$

Sei $i\in\{1\dots m\}$

$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

miro

Sei $i \in \{1, \dots, m\}$ $\qquad g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(\underset{\in \mathbb{R}^m}{x}) = \frac{\partial g}{\partial x_1}\big(f(x)\big) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial g}{\partial x_2}\big(f(x)\big) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x) + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n}\big(f(x)\big) \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k}\big(f(x)\big) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_k} \circ f\right)(x) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)$$

Sei $l \in \{1, \dots, m\}$

$$\frac{\partial^2 (g \circ f)}{\partial x_l \, \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_k} \circ f\right)(x) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)\right) =$$

$\boxed{(f+g)' = f' + g'}$ $\longrightarrow$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\left(\frac{\partial g}{\partial x_k} \circ f\right)(x) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)\right)$$

$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$ $\longrightarrow$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial g}{\partial x_k} \circ f\right)(x) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial g}{\partial x_k}\big(f(x)\big) \cdot \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_l \, \partial x_i}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_m \, \partial x_k}\big(f(x)\big) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_l}(x)\right) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial g}{\partial x_k}\big(f(x)\big) \cdot \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_l \, \partial x_i}(x)$$

$\frac{\partial g}{\partial x_k}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

miro

$x \in \mathbb{R}$

$x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x$

$(x)' = 1$

$\forall x, y \in \mathbb{R}:$
$x + y = y + x$

$dx \in (\mathbb{R}^2)'$ $\quad dx: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \mapsto dx$
$\in (\mathbb{R}^2)'$

$\omega: \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^2)', \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \omega_{(x,y)}$

Definition 2.111 (Rückzug) Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen $(m, n \in \mathbb{N})$, $\omega: U \to (\mathbb{R}^n)'$ eine 1-Form und $f: V \to U$ differenzierbar. Der *Rückzug* (engl. *pullback*) von ω mit f wird so definiert:

$$f^*\omega : V \to (\mathbb{R}^m)', \quad (f^*\omega)_x = (df_x)^*\omega_{f(x)} = \omega_{f(x)} \circ df_x, \tag{901}$$

a) $c^*\omega: \mathbb{R} \to (\mathbb{R})' \quad (c^*\omega)_t = \omega_{c(t)} \circ dc_t$

b) $(c^*\omega)_t(dt) = (\omega_{c(t)} \circ dc_t)(dt)$

$= \omega_{c(t)}(dc_t(dt)) =$

$= \omega_{c(t)} \begin{pmatrix} 3t^2 \cdot dt \\ 5t^4 \cdot dt \end{pmatrix}$

$\omega_{(x,y)} = 5x^4 y^3 \, dx + 3x^5 y^2 \, dy,$

$= \omega_{(c_1(t), c_2(t))} \begin{pmatrix} 3t^2 \, dt \\ 5t^4 \, dt \end{pmatrix}$

$= 5 \cdot t^{12} \cdot t^{15} \cdot 3t^2 \, dt$
$+ 3 \cdot t^{15} \cdot t^{10} \cdot 5t^4 \, dt$

$= 15 \, t^{29} \, dt + 15 \cdot t^{29} \, dt$

$= 30 \cdot t^{29} \cdot dt$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^3$

Gradient von f an Stelle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$(Df)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\nabla f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = (2x \quad 3y^2)$

lineare Abbildung

Ableitung von f an Stelle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$df_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Skalarprodukt

$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \mapsto (\nabla f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} =$

$= 2 \cdot x \cdot dx + 3y^2 \cdot dy$

$df: \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^2)' \leftarrow$ Menge der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto df_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$

$(Dc)(t) = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{\partial t}(t) \\ \frac{c_2}{\partial t}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 5t^4 \end{pmatrix}$

$dc_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$dt \mapsto (Dc)(t) \cdot dt$

$= \begin{pmatrix} 3t^2 \cdot dt \\ 5t^4 \cdot dt \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Jacobi-Matrix $\to Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}$

$x \in \mathbb{R}^m$

$df_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_m \end{pmatrix} \mapsto Df(x) \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_m \end{pmatrix}$