b) Ansatz:

$$(x^2-1)y' = xy^2 - 2xy \mid :(x^2-1)$$

$$\cancel{(x^2-1)y' = (xy - 2x)\cdot y}$$

$$\cancel{= (y - 2)\cdot xy}$$

$$y' = \frac{xy^2 - 2xy}{x^2-1} = \frac{xy(y-2)}{(x-1)(x+1)}$$

Aufgabe 5 [5+9 *Punkte*]

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

a) $y''-5y'+6y=0 \qquad y(0)=-2\,,\ \ y'(0)=2$

b) $(x^2-1)y'+2xy = xy^2 \qquad y(0)=1$

a) Ansatz: $y(t) = e^{\delta \cdot t}$.

$$y'(t) = e^{\delta\cdot t}\cdot \delta = \delta \cdot y(t)$$

$$y''(t) = e^{\delta\cdot t}\cdot \delta\cdot\delta = \delta^2\cdot e^{\delta\cdot t} = \delta^2 y(t)$$

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$\delta^2 y - 5\delta y + 6y = 0$$

$$y\cdot(\delta^2 - 5\delta + 6) = 0$$

$e^{\delta t} > 0$

$a\cdot b = 0 \Leftrightarrow a=0$ oder $b=0$

$$\Rightarrow \delta^2 - 5\delta + 6 = 0$$

$$(\delta-2)\cdot(\delta-3) = 0$$

$$\delta_1 = 2\,,\quad \delta_2 = 3$$

φ Lsg $\Rightarrow A\cdot\varphi$ Lsg

φ_1, φ_2 Lsg $\Rightarrow \varphi_1+\varphi_2$ Lsg

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung von $y''-5y'+6y=0$ ist

$$y(t) = A\cdot e^{\delta_1\cdot t} + B\cdot e^{\delta_2\cdot t} = A\cdot e^{2t} + B e^{3t}$$

$y(0)=-2\,,\ \ y'(0)=2$

$$y'(t) = A\cdot e^{2t}\cdot 2 + B\cdot e^{3t}\cdot 3$$

I) $y(0) = -2$

$A + B = -2 \quad \mid -B \Rightarrow A = -2-B$

II) $y'(0) = 2$

$2A + 3B = 2$

in II) $2\cdot(-2-B) + 3B = 2$

$-4 - 2B + 3B = 2$

$-4 + B = 2$

$B = 6$

$\Rightarrow A = -2-6 = -8$

$\Rightarrow y(x) = (-8)\cdot e^{2t} + 6\cdot e^{3t}$ ist die Lösung