Seperation der Variablen

$y'(t) = f(t) \cdot g(y(t)) \quad | : g(y(t))$

$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)$

Produktregel

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$(u(t) \cdot e^{-2t})' = u'(t) \cdot e^{-2t} + u(t) \cdot (-2) \cdot e^{-2t}$

$= (u'(t) - 2u(t)) \cdot e^{-2t}$

Aufgabe 7
Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung:

a) $u'(t) = 2u(t) + e^t$ mit $u(0) = 1$

$a(t) = 2 \quad A(t) = 2t$ ✓

$u'(t) = 2u(t) + e^t \quad | -2 \cdot u(t)$

$u'(t) - 2 \cdot u(t) = e^t \quad | \cdot e^{-2t}$

$(u'(t) - 2 \cdot u(t)) \cdot e^{-2t} = e^t \cdot e^{-2t}$

$(\underbrace{u(t) \cdot e^{-2t}}_{=: z(t)})' = e^t \cdot e^{-2t}$

$z'(t) = e^{-t}$

Variation der Konstante

$y'(t) + a(t) \cdot y(t) = b(t)$

Sei A Stammfkt von a, d.h. $A' = a$

$(y'(t) + a(t) \cdot y(t)) e^{A(t)} = b(t) \cdot e^{A(t)}$

$(y(t) \cdot e^{A(t)})' = b(t) \cdot e^{A(t)}$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$(y(t) \cdot e^{A(t)})' = y'(t) \cdot e^{A(t)} + y(t) \cdot \underbrace{A'(t)}_{= a(t)} \cdot e^{A(t)}$

$= (y'(t) + a(t) \cdot y(t)) \cdot e^{A(t)}$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$\overset{t_0}{\underset{\|}{}} z(0) = u(0) \cdot e^{-2 \cdot 0} =$

$= 1 \cdot 1 = 1 =: z_0$

$\Rightarrow z(t) = z_0 + \int_{t_0 = 0}^{t} e^{-s} \, ds = 1 + \left[-e^{-s} \right]_0^t =$

$= -e^{-t} + 1 = 2 - e^{-t}$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Hauptsatz} \\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x_0, y_0 \in \mathbb{R} \\ F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s)\, ds \\ \text{Dann gilt } F' = f \\ \text{und } F(x_0) = y_0 + \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} f(s)\, ds}_{=0} = y_0 \end{array}}$

$z(t) = u(t) \cdot e^{-2t} \quad | \cdot e^{2t}$

$\Rightarrow u(t) = z(t) \cdot e^{2t} = (2 - e^{-t}) \cdot e^{2t}$

$= 2e^{2t} - e^t$

Aufgabe 7
Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung:

a) $u'(t) = 2u(t) + e^t$ mit $u(0) = 1$

$a(t) = 2 \quad A(t) = 2t$ ✓

Probe:

$u(0) = 2 \cdot e^{2 \cdot 0} - e^0 = 2 - 1 = 1$ ✓

$\left.\begin{array}{l} u'(t) = (2 \cdot e^{2t} - e^t)' = 4e^{2t} - e^t \\ 2u(t) + e^t = 2 \cdot (2e^{2t} - e^t) + e^t = \\ \quad = 4e^{2t} - 2e^t + e^t = \\ \quad = 4e^{2t} - e^t \end{array}\right\} \Rightarrow u'(t) = 2u(t) + e^t$

miro

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)$

5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Variation der Konstanten

(a) $y' + \frac{y}{1+x} = e^{(2x)}$ $\quad y(\underset{x_0}{0}) = \underset{y_0}{1}$

(b) $y'\cos(x) - y\sin(x) = 1$

$y(x_0) = y_0$

$y'(x) + a(x)\cdot y(x) = b(x)$

$(y'(x) + a(x)\cdot y(x))\cdot e^{A(x)} = b(x)e^{A(x)}$

$\big(\underbrace{y(x)\cdot e^{A(x)}}_{=:\,z(x)}\big)' = b(x)\,e^{A(x)}$

$z'(x) = b(x)\cdot e^{A(x)}$ $\quad z(x_0) = y(x_0)\cdot e^{A(x_0)}$

$z(x) = z(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)\,e^{A(t)}\,dt$

$y(x) = z(x)\cdot e^{-A(x)}$

$a(x) = \frac{1}{1+x}$

$A(x) = \int \frac{1}{1+x}\,dx$
$= \ln(1+x)$

$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}\cdot\underbrace{(1+x)'}_{=1}$

$y'(x) + \frac{y}{1+x} = e^{2x}$

$y'(x) + \frac{1}{1+x}\cdot y(x) = e^{2x} \quad \Big|\cdot \underbrace{e^{\ln(x+1)}}_{=(x+1)}$

$\left(y'(x) + \frac{1}{1+x}\cdot y(x)\right)\cdot \underset{e^{A(x)}}{(x+1)} = e^{2x}\cdot(x+1)$

$\big(\underbrace{y(x)\cdot \overbrace{(x+1)}^{e^{A(x)}}}_{z(x)}\big)' = e^{2x}\cdot(x+1)$

$z(0) = y(0)\cdot(0+1) =$
$= 1\cdot 1 = 1 =$

$z'(x) = e^{2x}\cdot(x+1)$

$\Rightarrow z(x) = 1 + \int_0^x e^{2s}\cdot(s+1)\,ds$

$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

$= 1 + \left[\frac{1}{2}e^{2s}\cdot(s+1)\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}e^{2s}\cdot 1\,ds = 1 + \frac{1}{2}e^{2x}\cdot(x+1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}e^{2s}\right]_0^x$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2x}(x+1) - \frac{1}{4}\cdot(e^{2x} - 1)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2x}\cdot(x+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}e^{2x}(x + \frac{1}{2})$

Partielle Integration

$\int_a^b g'(x)\cdot f(x)\,dx = [g(x)\cdot f(x)]_a^b - \int_a^b g(x)\cdot f'(x)\,dx$

$z(x) = y(x)\cdot(x+1)$

$\Rightarrow y(x) = \frac{z(x)}{x+1} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot e^{2x}(x+\frac{1}{2})}{x+1}$

5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Variation der Konstanten

(a) $y' + \frac{y}{1+x} = e^{(2x)}$ $\quad y(0) = 1$

(b) $y'\cos(x) - y\sin(x) = 1$ $\quad y(0) = 1$

$y(0) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}e^{2\cdot 0}\cdot(0 + \frac{1}{2})}{0+1} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$ ✓

$y' + \frac{y}{1+x} =$

&

$y'(x) = \left(\frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}e^{2x}(x+\frac{1}{2})}{x+1}\right)' =$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$