Ω Menge, $|\Omega| = 5$
$|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^5 = 2^{|\Omega|}$

$|\mathcal{P}(\Omega)| = |2^{\Omega}| = 2^{|\Omega|}$

$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$2^{\mathbb{N}} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Aufgabe 4.3

(a) Zeigen Sie: Es gilt $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}|$.

(b) Zeigen Sie: Sei $A_{\mathbb{N}}$ die Menge aller Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{N}_0$. Dann gilt $|A_{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}|$.

b)

d.h. $\exists$ Bijektion $f: A_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$

- Gilt für beliebige Mengen: wenn $|A| \leq |B|$ und $|A| \geq |B|$, dann $|A| = |B|$?

Ohne Beweis: Satz von Cantor-Bernstein-Schröder

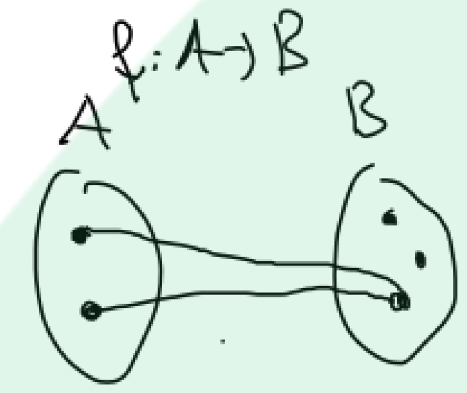
Sind $f: A \to B$ und $g: B \to A$ injektiv, dann gibt es $h: A \to B$ bijektiv.

oder

$\exists f: A_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ injektiv
und $\exists g: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to A_{\mathbb{N}}$ injektiv

$R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
Äquivalenzrelation, falls

- R reflexiv, d.h. $\forall x \in \mathbb{N}: (x,x) \in R$
- R symmetrisch $\forall x,y \in \mathbb{N}: (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$
- R transitiv $\forall x,y,z \in \mathbb{N}: (x,y) \in R \land (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$



Wähle $g: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to A_{\mathbb{N}}$

$B \mapsto \underbrace{\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (n \in B \land m \in B) \lor (n \notin B \land m \notin B)\}}_{R_B}$

$\mapsto \underbrace{\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (n \in B \land m \in B) \lor n = m\}}_{R_B}$ nicht injektiv

$g: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to A_{\mathbb{N}}$
$B \mapsto \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}_0:$
$(n+k \in B \land m+k \in B)$
$\lor (n+k \notin B \land m+k \notin B)\}$

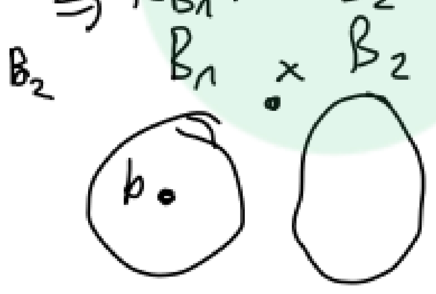
- g injektiv, d.h. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$:
$B_1 \neq B_2 \Rightarrow \underset{R_{B_1}}{\underset{\shortparallel}{g(B_1)}} \neq \underset{R_{B_2}}{\underset{\shortparallel}{g(B_2)}}$

$\forall n \in \mathbb{N}: (n,n) \in R_B$

$B = \{1,2\}$
$(3,3) \in R_B$
$g(\{1\}) = g(\{2\})$ $(1,2) \in R_B \land (2,3) \notin R_B$
$R_{\{1\}} = R_{\{2\}} = R_{\{3\}}$
$\shortparallel$
$\{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Sei $B_1 \neq B_2$, d.h. wir finden $b \in \mathbb{N}$ sodass $b \in B_1$ und $b \notin B_2$ (oder umgekehrt).

1. Fall $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ Wir finden $x \in B_1 \cap B_2$:
$(b,x) \in R_{B_1}$ und $(b,x) \notin R_{B_2}$ $\Rightarrow R_{B_1} \neq R_{B_2}$



2. Fall $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ und $B_1 \cup B_2 \neq \mathbb{N}$:
Sei $x \in (B_1 \cup B_2)^c$
$(b,x) \notin R_{B_1}$ und $(b,x) \in R_{B_2}$
$\Rightarrow R_{B_1} \neq R_{B_2}$

$B_1 = \{1\}$
$B_2 = \mathbb{N}_{\geq 2}$

3. Fall $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ und $B_1 \cup B_2 = \mathbb{N}$:

$B_1 = \{1\}$ $B_2 = \mathbb{N}_{\geq 2}$
$\Rightarrow g(B_1) = g(B_2) \Rightarrow g$ nicht injektiv