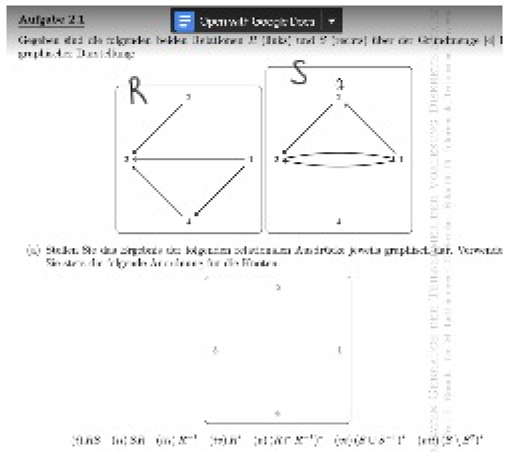
$xRy \Rightarrow \neg(yRx)$ keine Schleifen

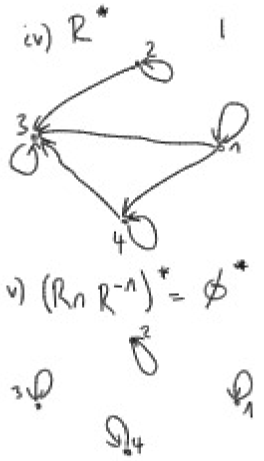
$xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$

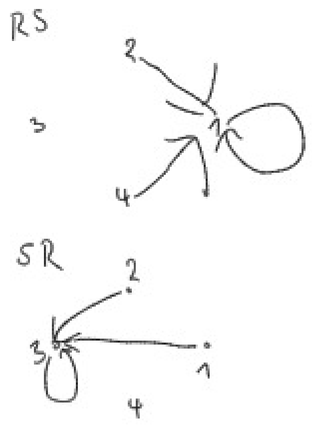
Schleifen erlaubt

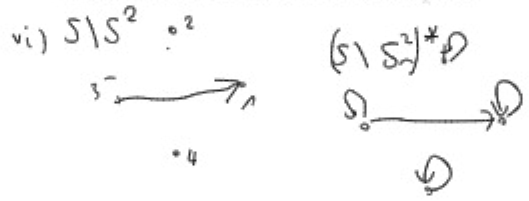
(b) Bestimmen Sie für jede der folgenden Relationen, welche Eigenschaften (reflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv) sie besitzt, und geben Sie explizit an, ob es sich ggf. um eine Äquivalenzrelation oder eine (partielle) Ordnung handelt:

$(i)\, R \quad (ii)\, S \quad (iii)\, R^* \quad (iv)\, (R \cap R^{-1})^* \quad (v)\, (S \cup S^{-1})^* \quad (vi)\, (S \setminus S^2)^*$









Aufgabe 2.2

(a) Sei $f : A \to B$ nun eine beliebige Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$\equiv_f := \{(a, a') \in A \times A \mid f(a) = f(a')\}$$

eine Äquivalenzrelation auf A ist.

(b) Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A.

Dann ist $R \subseteq A$ ein *Repräsentantensystem* bzgl. $\equiv$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Für alle $r, r' \in R$ gilt, falls $r \neq r'$, dann auch $r \not\equiv r'$.
2. Für jedes $a \in A$ gibt es ein $r \in R$ mit $r \equiv a$.

Bestimmen Sie jeweils zwei verschiedene Repräsentantensysteme bzgl. der jeweiligen Relation $\equiv_f$:

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x \bmod 7$

  Erinnerung : $(x \bmod n) := \min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid \frac{x-k}{n} \in \mathbb{Z}\}$, z.B. $-5 \bmod 7 = 2$ und $12 \bmod 7 = 5$.
- $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z} : (x, y) \mapsto y - x$

5

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x^2 - 1)^2$.
- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(\frac{\pi}{3} x)$

a) Zu zeigen: $\equiv_f$ Äquivalenzrelation, d.h.

1) $\equiv_f$ reflexiv, d.h. $\forall a \in A: a \equiv_f a$ Beweis: Sei $a \in A$. $f(a) = f(a) \Rightarrow a \equiv_f a$

2) $\equiv_f$ symmetrisch, d.h. $\forall a, a' \in A: a \equiv_f a' \Rightarrow a' \equiv_f a$

Beweis: Sei $a, a' \in A$ und $a \equiv_f a'$. Dann $f(a) = f(a') \Rightarrow f(a') = f(a) \Rightarrow a' \equiv_f a$

3) $\equiv_f$ transitiv, d.h. $\forall a, b, c \in A: a \equiv_f b \wedge b \equiv_f c \Rightarrow a \equiv_f c$

Beweis: Sei $a, b, c \in A$ und $a \equiv_f b$ und $b \equiv_f c$. $\Rightarrow f(a) = f(b)$ und $f(b) = f(c) \underset{= \text{ ist transitiv}}{\Rightarrow} f(a) = f(c) \Rightarrow a \equiv_f c$

$R_2 = \{(n+1, 1) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(1, n+1) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

$f(1,1) = 0$

$f(1, n) = n - 1$

$f(n, 1) = 1 - n$

$f(n+1, 1) = 1 - (n+1) = -n$

$R_1 = \{(n, 0) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

$R_1 = \{(0,0), (1,0), (2,0), \ldots, (0,1), (0,2)$

$f(0,0) = 0 - 0 = 0$

$f(1,0) = 0 - 1 = -1$

$f(n,0) = 0 - n = -n$

$f(0,1) = 1 - 0 = 1$

$R_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad R_2 = \{7, 1, 2, 10, 4, 5, 13\}$

$33 \equiv 5$

$42 \equiv 0$

$22 \equiv 1$

$0 \not\equiv 1$, da $f(0) = 0 \bmod 7 = 0 \neq f(1) = 1 \bmod 7 = 1$

$7 \equiv 0$, da $f(7) = 7 \bmod 7 = 0 = f(0)$

Aufgabe 2.3

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Wir betrachten die folgende Sprache $L \subseteq \Sigma^*$:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält sowohl ein } a \text{ als auch ein } b\}$$

Bezüglich L definieren wir die Äquivalenzrelation $\sim_L$ auf Σ^* durch

$$u \sim_L v \text{ falls für alle } z \in \Sigma^* \text{ gilt: } uz \in L \text{ genau dann, wenn } vz \in L$$

Bestimmen Sie alle 4 Äquivalenzklassen von $\sim_L$. Geben Sie auch ein Repräsentantensystem an, das aus möglichst kurzen Wörtern besteht.

$ac \quad cca \notin L$

$acca \notin L$

$R_1 = \{a, ab, b, c\}$

$R_2 = \{a, b, ab, \varepsilon\}$

$\Sigma^* = \{a, abb, ccc, \varepsilon, \ldots\}$

$L = \{ab, abb, abbc, \ldots\}$

$ccc \notin L$

$ca \notin L$

$[a] = \{w \in \Sigma^* \mid w \sim_L a\} = \{a, aa, aaa, ac, \ldots\} = \{w \in \Sigma^* \mid w$ enthält ein a aber kein $b\}$

$\neg(aba \sim_L a)$, da $ab\underset{z}{a}c \in L$ aber $ac \notin L$

$\exists z \in \Sigma^*: abaz \in L$ und $az \notin L \Rightarrow \neg(aba \sim_L a)$

$[ab] = \{ab, ba, abc, abcb, \ldots\} = L$

$[b] = \{w \in \Sigma^* \mid w$ enthält b aber kein $a\} = \{bc, bb, bbb, cb, \ldots\}$

$[c] = \{w \in \Sigma^* \mid w$ enthält weder a noch $b\} = \{c, cc, ccc, \ldots\} = \{c^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

$\neg(ba \sim_L b)$ weil $ba\varepsilon \in L$ aber $b\varepsilon \notin L$

$\neg(ac \sim_L c)$ weil $acb \in L$ aber $cb \notin L$

miro