$$|E| = \frac{\sum_{v \in V} deg(v)}{2} = \frac{4+4+3\cdot 3+1}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Jeder einfache solche Graph ist planar vgl. Kuratowski! ⇐

Aufgabe 6.2

(a) Ist jeder einfache Graph mit der Gradsequenz (1, 3, 3, 3, 4, 4) planar?

(b) Ist jeder einfache Graph mit der Gradsequenz (2, 2, 3, 3, 4, 4) zusammenhängend? Ja!

(c) Besitzt jeder einfache Graph mit der Gradsequenz (2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4) eine Eulertour?

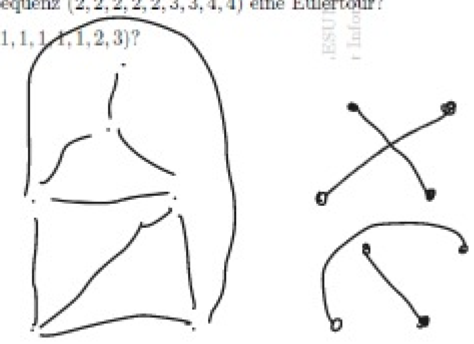
(d) Gibt es einen Baum mit der Gradsequenz (1, 1, 1, 1, 1, 2, 3)?

c)

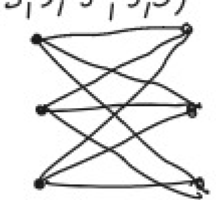
▷ Satz von Kuratowski:

Ein einfacher Graph $G = (V, E)$ ist genau dann planar, wenn weder der $K_{3,3}$ noch der K_5 ein Minor von G ist.

d)

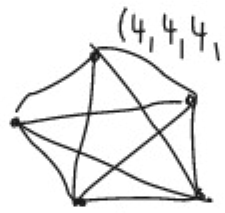


(3,3,3,3,3,3)



$K_{3,3}$

(4,4,4,4,4)

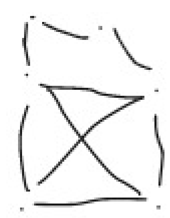


K_5

$$|E| = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$

(2, 2, 3, 3, 4, 4) geht nicht!

e)



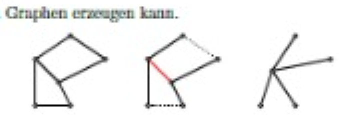
Minoren und Satz von Kuratowski 169

- Definition: Für zwei gegebene einfache Graphen $H = (V_H, E_H)$ und $G = (V_G, E_G)$ sagt man, dass „H ein Minor von G" ist, falls man aus G schrittweise mittels
  - ▷ Entfernen von Kanten,

58

  - ▷ Entfernen von Knoten vom Grad 0 und
  - ▷ Kantenkontraktion

einen zu H isomorphen Graphen erzeugen kann.



(c) Besitzt jeder einfache Graph mit der Gradsequenz (2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4) eine Eulertour? Nein!

c)

– Eulertour, falls er jede Kante genau einmal besucht:

$|\{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}\}| = |E|$.

– Hamiltonkreis, falls er jeden Knoten genau einmal besucht:

$|\{v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}\}| = |V|$.

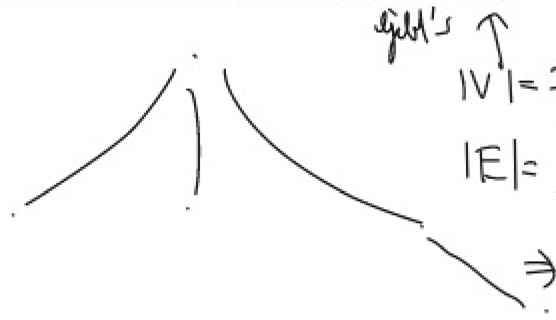
Eulertouren: Existenz 158

- Satz: Ein zusammenhängender einfacher Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann eine Eulertour, wenn jeder Knoten geraden (positiven) Knotengrad hat.

$G = (V, E)$ Baum $\Rightarrow |V| = |E| + 1$

(d) Gibt es einen Baum mit der Gradsequenz (1, 1, 1, 1, 1, 2, 3)?

d)



gibt's ?

$|V| = 7$

$|E| = 2$

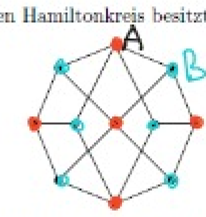
$$|E| = \frac{\sum_{v \in V} deg(v)}{2} = \frac{5\cdot 1 + 2 + 3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$\Rightarrow |V| \neq |E| + 1$

$\Rightarrow$ kein Baum

Aufgabe 6.3 **Hamiltonkreis**

Zeigen Sie, dass folgender Graph keinen Hamiltonkreis besitzt:



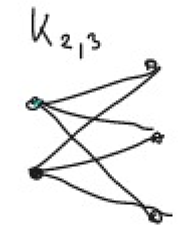
$|V| = 11$

$\cong$ Subgraph von $K_{5,6}$

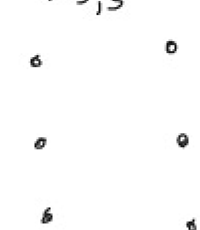
hat keinen Hamiltonkreis

nur für $m = n$

$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{3,4}$

Überlegen Sie sich hierfür, für welche Werte von m und n der vollständige bipartite Graph $K_{m,n}$ einen Hamiltonkreis enthält.

$$\frac{|V|}{2} = 5,5$$

Hamiltonkreise: Existenz 162

- Beweis: Ein einfacher Graph $G = (V, E)$, in dem jeder Knoten mindestens Grad $\frac{|V|}{2}$ hat, enthält einen Hamiltonkreis.

Aufgabe 6.4

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher *nicht zusammenhängender* Graph mit $n = |V|$ Knoten. Bestimmen Sie die maximale Zahl an Kanten $m = |E|$ in Abhängigkeit von n, die G haben kann.

$n = 2$ $n = 3$ $n = 4$ $n = 5$

$E_2 = 0$ $E_3 = 1$ $E_4 = 3$ $E_5 = 6$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$E_n = |E(K_{n-1})| = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

miro