Aufgabe 7.4 (3 P.): *Funktionsweise eines Zyklotrons*

Ein Zyklotron ist ein Teilchenbeschleuniger der aus zwei D förmigen Hohlräumen besteht, siehe Abb. 3. In den Platten herrsche das konstante Magnetfeld $B = 250{,}0\,mT$ welches in beiden Plattenteilen gleich orientiert ist. Der Radius beträgt $r = 0{,}500\,$m. Beide Platten seien durch einen Spalt der Breite $d = 2{,}000\,$mm getrennt. In der Mitte befindet sich eine Quelle für geladene Teilchen (1). An die beiden Platten wird nun eine Rechteckförmige Wechselspannung angelegt die zwischen $U = \pm 4{,}000\,$kV oszilliert. Die Teilchen werden durch die Spannung zunächst in eine der Platten beschleunigt. Durch das Magnetfeld werden die geladenen Teilchen auf Kreisbahnen gelenkt und wann immer die Teilchen von einer Platte zur anderen herüberwechseln wird die Spannung U umgepolt, sodass die Teilchen erneut beschleunigt werden. In den Platten selbst herrscht dabei kein elektrisches Feld. Dieser Prozess wiederholt sich so lange bis die beschleunigten Teilchen das Zyklotron verlassen (2).

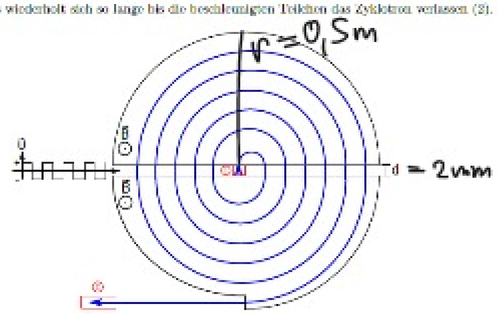


Abbildung 3: Skizze zu Aufgabe 7.3[1]

(a) (1 P.) Sie wollen Protonen beschleunigen. Leiten Sie her mit welcher Frequenz f die Spannung U umgepolt werden muss, damit das Zyklotron funktioniert.
(b) (1 P.) Auf welche maximale Geschwindigkeit können Sie die Protonen in diesem Zyklotron beschleunigen?
(c) (1 P.) Schätzen Sie ab wie lange ein Proton braucht um von der Teilchenquelle aus auf die Endgeschwindigkeit beschleunigt zu werden.

a) $F_Z = F_L$

$$m\cdot\omega^2\cdot r = q\cdot v\cdot B$$

$$m\cdot\omega^{\cancel{2}}\cdot\cancel{r} = q\cdot\cancel{r}\cdot\cancel{\omega}\cdot B$$

$$m\cdot\omega = q\cdot B$$

$$m\cdot\frac{2\pi}{T} = q\cdot B$$

$$T = \frac{m\cdot 2\pi}{q\cdot B} = \frac{m_p\cdot 2\pi}{e\cdot 250\cdot 10^{-3}\,T} = 2{,}624\cdot 10^{-7}\,s$$

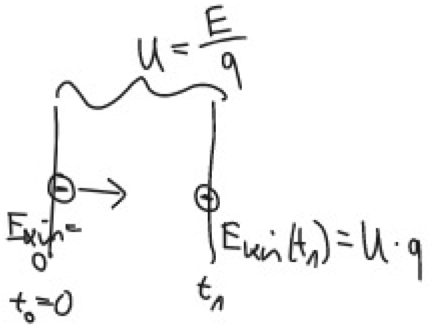
$$f = \frac{\text{Anzahl der Umpolungen}}{\text{Zeit}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot T} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 2{,}624\cdot 10^{-7}\,s} = \approx \frac{7{,}6\cdot 10^{6}}{s}$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$v = \frac{\Delta b}{\Delta t} = \frac{r\cdot\Delta\varphi}{\Delta t} = r\cdot\omega$$

$$\boxed{v = r\cdot\omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



c) $N = \text{Anzahl Durchlaufen des Spalts} = \frac{E_{kin,max}}{U\cdot e} =$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot m_p\cdot v_{max}^2}{U\cdot e} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot m_p\cdot\left(1{,}2\cdot 10^{7}\,\frac{m}{s}\right)^2}{4000\cdot 10^{3}\,V\cdot e}$$

$$= \cancel{0{,}188}$$

$$t = N\cdot\frac{1}{2}\cdot T = \_\_\_\_\cdot\frac{1}{2}\cdot 2{,}624\cdot 10^{-7}\,s$$

b) $F_Z = F_L$

$$m\cdot\omega^2\cdot r = q\cdot v\cdot B$$

$$m\cdot\left(\frac{v}{\cancel{r}}\right)^2\cdot r = q\cdot v\cdot B$$

$$m\cdot\frac{v^{\cancel{2}}}{r} = q\cdot\cancel{v}\cdot B$$

$$v_{max} = \frac{r\cdot q\cdot B}{m} = \frac{0{,}5\,m\cdot e\cdot 250\cdot 10^{-3}\,T}{m_p} =$$

$$\approx 1{,}2\cdot 10^{7}\,\frac{m}{s}$$

miro

Aufgabe 7.3 (4 P.): *Magnetfeld eines Hohlleiters*

Ein Strom I fließe in einem unendlich langen Draht mit Radius R_a aus dem in der Mitte ein ebenfalls unendlich langer Zylinder mit Radius R_i herausgeschnitten wurde, siehe Abb. 1.

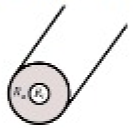
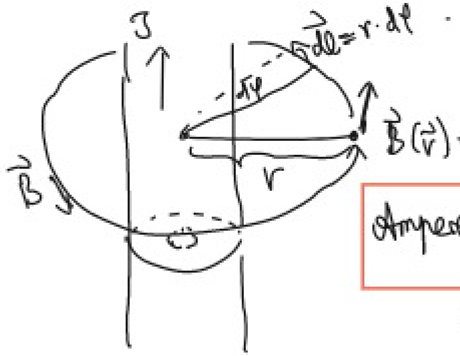


Abbildung 1: Skizze zu Aufgabe 7.3

(a) (3 P.) Berechnen Sie das vom Hohlleiter erzeugte magnetische Feld (Betrag und Richtung) als Funktion des Ortes. (*Hinweis:* Verwenden Sie das Ampere'sche Gesetz)

(b) (1 P.) Skizzieren Sie das Magnetfeld als Funktion des radialen Abstandes von der Mitte des Drahtes.



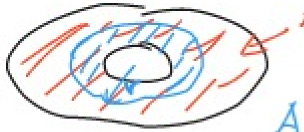
$\vec{B}(\vec{r}) = B_\varphi(r)\cdot\vec{e}_\varphi$

Das folgt aus Bio-Savart

$$\boxed{\text{Ampere:}\quad \int \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0\cdot J_{enc}}$$

$$\int_0^{2\pi} B_\varphi(r)\cdot\vec{e}_\varphi\,\underbrace{r\cdot d\varphi\circ\vec{e}_\varphi}_{\vec{dl}} = \int_0^{2\pi} B_\varphi(r)\cdot r\cdot d\varphi = B_\varphi(r)\cdot r\cdot 2\pi = \mu_0\cdot J_{enc} = \mu_0\cdot\begin{cases} J & r\geq R_a \\ J\cdot\frac{r^2-R_i^2}{R_a^2-R_i^2} & R_a>r\geq R_i \\ 0 & r<R_i\end{cases}$$

$\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi = 1$



$A = R_a^2\pi - R_i^2\pi$

$J \mathrel{\hat{=}} \pi\cdot(R_a^2-R_i^2)$

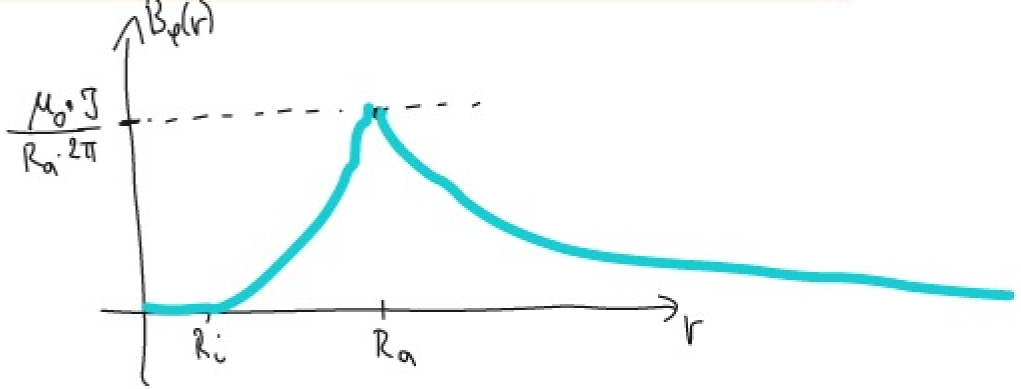
$A = r^2\pi - R_i^2\pi$

$x \mathrel{\hat{=}} \pi\cdot(r^2-R_i^2)$

$\Rightarrow x = J\cdot\frac{r^2-R_i^2}{R_a^2-R_i^2}$

$\frac{x}{J} = \frac{\pi(r^2-R_i^2)}{\pi(R_a^2-R_i^2)}$

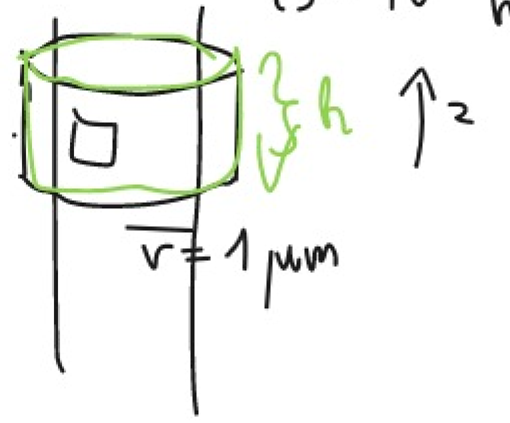
$$\Rightarrow \boxed{B_\varphi(r) = \frac{\mu_0\cdot J_{enc}}{r\cdot 2\pi} = \frac{\mu_0}{r\cdot 2\pi}\cdot\begin{cases} J & r\geq R_a \\ J\cdot\frac{r^2-R_i^2}{R_a^2-R_i^2} & R_a>r\geq R_i \\ 0 & r<R_i\end{cases}}$$



Aufgabe 7.2 (2 P.): *Feld eines bewegten geladenen Drahtes*
Ein unendlich langer, geladener Draht mit dem Radius $r = 1\mu m$ und der Linienladungsdichte $10^{10}\frac{e}{m}$, sei entlang der z-Achse orientiert. Nehmen wir zunächst an der Draht sei in Ruhe.

(a) (1 P.) Sie haben bereits auf Blatt 2 das elektrische Feld eines geladenen Drahtes mit dem Gauß'schen Gesetz bestimmt. Wie groß ist das Feld an der Oberfläche des Drahtes in Ruhe?

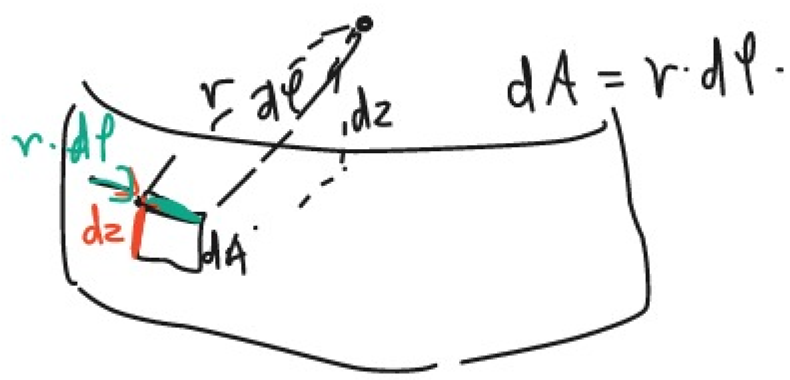
(b) (1 P.) Der Draht bewege sich nun mit einer Geschwindigkeit von $v = 0.9c$ entlang der z-Achse. Wie groß ist das Feld an der Oberfläche des bewegten Drahtes?



$\delta = 10^{10}\frac{e}{m}$

Gauß: $\int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\, d\vec{r} = \int_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{A}$

$$\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \int_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{A}$$



$dA = r\cdot d\varphi\cdot$

$$\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \int_0^h \int_0^{2\pi} E_r(r)\cdot \underbrace{r\cdot d\varphi\, dz}_{dA}$$

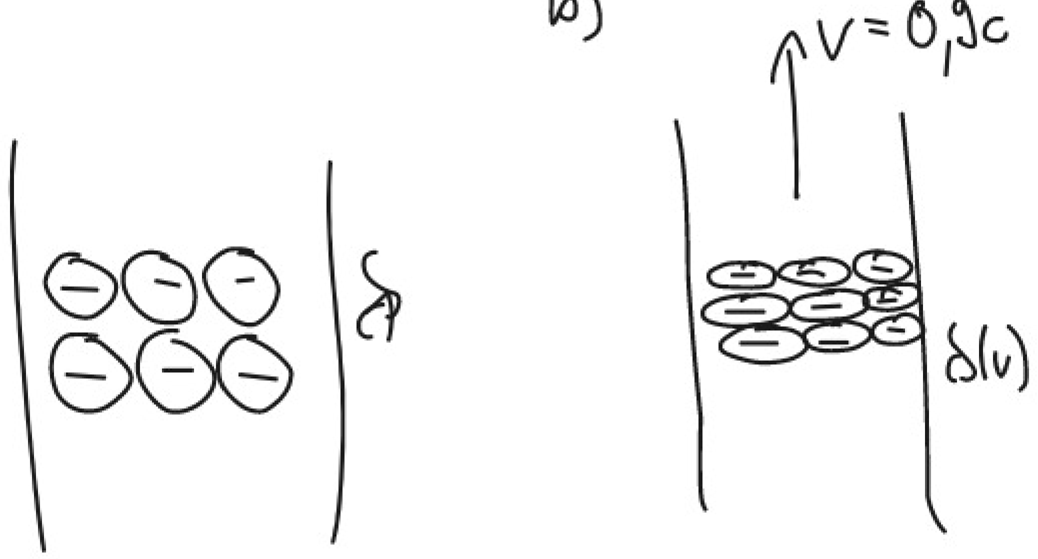
$$\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = E_r(r)\cdot r\cdot 2\pi\cdot h$$

$$\frac{\delta\cdot \cancel{h}}{\varepsilon_0} = E_r(r)\cdot r\cdot 2\pi\cdot \cancel{h}$$

$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{\delta\cdot}{\varepsilon_0\cdot r\cdot 2\pi} = \frac{10^{10}\frac{e}{m}}{\varepsilon_0\cdot 1\cdot 10^{-6} m\cdot 2\pi}$$

$$\approx 1{,}8\cdot 10^{26}\,\frac{N}{C}$$

b)



$$L(v) = L_0\cdot\frac{1}{\gamma} = L_0\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\delta(v) = \delta\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E(v) = \frac{\delta(v)}{\varepsilon_0\cdot r\cdot 2\pi} = \frac{\overset{10^{10}\frac{e}{m}}{\delta}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}9\cancel{c}}{\cancel{c}}\right)^2}}}{\varepsilon_0\cdot 1\cdot 10^{-6} m\cdot 2\pi}$$

$$\approx 4{,}1\cdot 10^{26}\,\frac{N}{C}$$

miro