Aufgabe 12.1 (3 P.): *Selbstinduktion einer Spule*

Eine Induktivität zur Erzeugung eines konstanten Magnetfeldes (L = 450 H, Spulenwiderstand R_L =10 Ω) wird zur Zeit t = 0 von der Gleichspannungsquelle (konstante Spannung U_0 = 100 V) entkoppelt, indem man den Schalter öffnet.

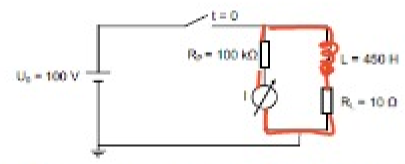
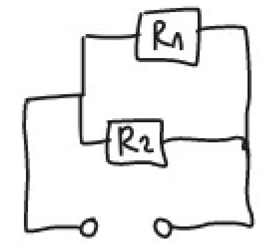


Abb. 1: Schaltung für Aufgabe 12.1. Der Strommesser ist für Aufgabenteil b) eingezeichnet.

(a) (0.5 P) Welcher Gesamtstrom fließt vor dem Öffnen des Schalters?

(b) (1.5 P) Berechnen Sie den Strom als Funktion der Zeit für $t > 0$. Nehmen Sie hierzu an, dass beim Öffnen des Schalters zur Zeit t = 0 durch die Stromänderung eine Spannung $U_{ind} = 10^5$ V in der Spule induziert wird.



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\boxed{R = \frac{U}{J}}$$

a) $$J = \frac{U}{R} = \frac{1}{R} \cdot U = \left(\frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_p}\right) \cdot U = \left(\frac{1}{10\,\Omega} + \frac{1}{100 \cdot 10^3\,\Omega}\right) \cdot 100\,V = 10{,}001\,A$$

b) Kirchhoff'sche Maschenregel
Die Summe der Verbraucherspannungen in der gleich der anliegenden Spannung in jeder Masche.

b) $$U_{ind} = U_{R_L} + U_{R_p}$$

$$-L \cdot \frac{dJ}{dt} = R_L \cdot J + R_p \cdot J$$

$$-L \cdot \frac{dJ}{dt} = J \cdot (R_L + R_p)$$

DGL → $$\frac{dJ}{dt} = -\frac{(R_L + R_p)}{L} \cdot J$$

$$\boxed{\begin{aligned} y'(x) &= -\delta \cdot y(x) \\ y(x) &= C \cdot e^{-\delta x} \end{aligned}}$$

Probe: $y'(x) = (C \cdot e^{-\delta x})' = C(-\delta)\,e^{-\delta x} = (-\delta) \cdot y(x)$ ✓

$$\Rightarrow J(t) = C \cdot e^{-\frac{(R_L + R_p)}{L} \cdot t}$$

$$\dot{J}(t) = \frac{dJ}{dt} = C \cdot (-1) \cdot \frac{R_L + R_p}{L} \cdot e^{-\frac{(R_L + R_p)}{L} \cdot t}$$

$$U_{ind}(t) = -L \cdot \frac{dJ}{dt}$$

$$U_{ind}(0) = 10^5\,V$$

$$-L \cdot \frac{dJ}{dt}(0) = 10^5\,V$$

$$\cancel{-L} \cdot C \cdot \cancel{(-1)} \cdot \frac{R_L + R_p}{\cancel{L}} = 10^5\,V$$

$$\Rightarrow C = \frac{10^5\,V}{R_L + R_p} = \frac{10^5\,V}{10\,\Omega + 100 \cdot 10^3\,\Omega} =$$

$$\boxed{\Rightarrow J(t) = \frac{10^5\,V}{R_L + R_p} \cdot e^{-\frac{(R_L + R_p)}{L} \cdot t}}$$

Aufgabe 12.2 (5 P.): *Impedanz eines RLC-Schwingkreises*

(a) (3 P.) Es liege eine Wechselspannung von $U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}$ an. Bestimmen Sie für den unten skizzierten *RLC*-Schwingkreis die komplexe Gesamtimpedanz Z_{ges}. Was ist der Betrag der Gesamtimpedanz $|Z_{\text{ges}}|$ und die Phasenverschiebung ϕ?

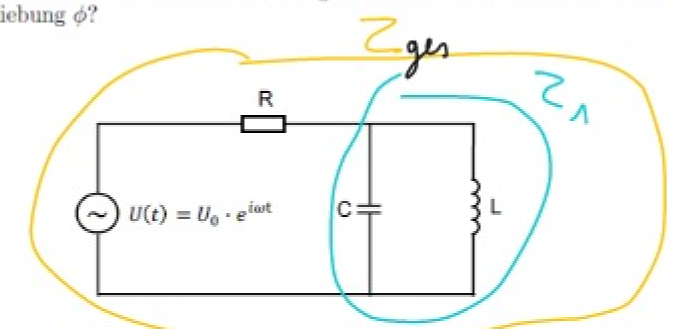
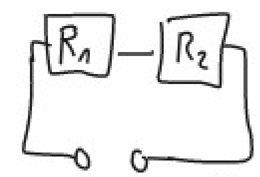
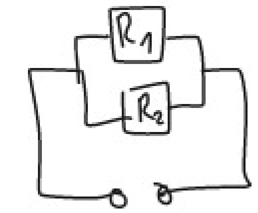


Abb. 2: Schaltskizze des RLC-Schwingkreises.

(b) (2 P.) Zeichnen Sie den Frequenzverlauf von $|Z_{\text{ges}}|$ und ϕ.

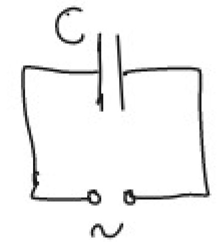


$R = R_1 + R_2$

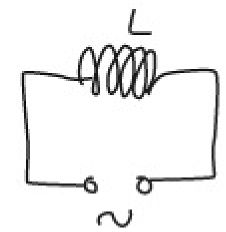


$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$



$Z_C = \frac{1}{i \omega \cdot C}$



$Z_L = i \cdot \omega \cdot L$

$U_{ind} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$

$$Z_1 = \frac{Z_C \cdot Z_L}{Z_C + Z_L}$$

$$Z_{ges} = Z_1 + R = \frac{\frac{1}{\cancel{i\omega} C} \cdot \cancel{i\omega} L}{\frac{1}{i\omega C} + i\omega L} + R =$$

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$= \frac{L}{C} \cdot \frac{1}{-i \cdot \frac{1}{\omega C} + i\omega L} + R$$

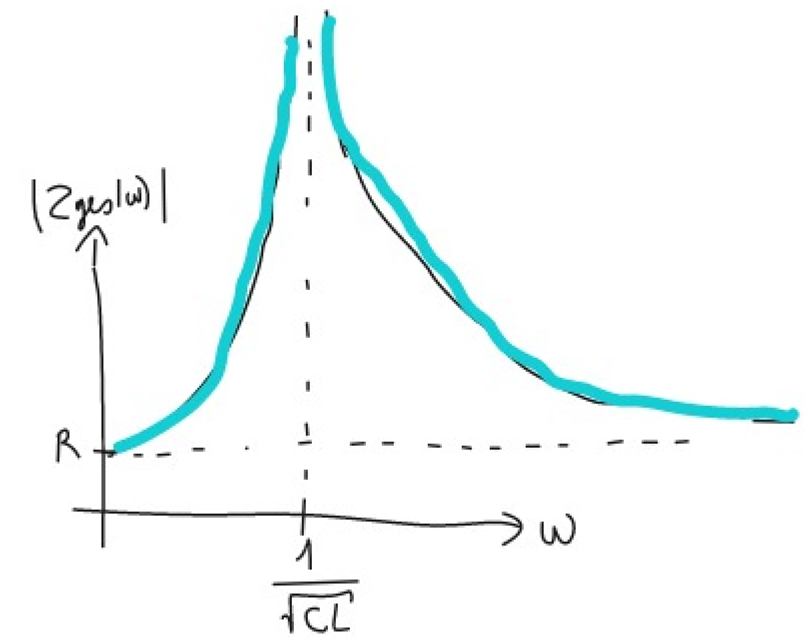
$$= \frac{L}{C} \cdot \frac{1}{i \cdot (\omega L - \frac{1}{\omega C})} + R$$

$$= -\frac{L}{C} \cdot \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \cdot i + R$$

$$\boxed{|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$|Z_{ges}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{C} \cdot \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{L \cdot \omega}{\omega^2 C \cdot L - 1}\right)^2}$$

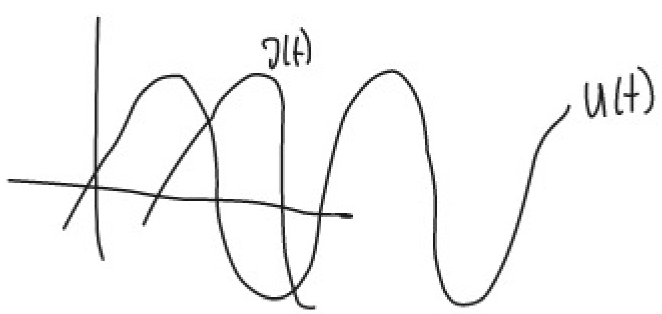
$$\tan \phi = \frac{Im(Z_{ges})}{Re(Z_{ges})} = \frac{-\frac{L}{C} \cdot \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}}{R}$$



$\omega^2 C \cdot L - 1 = 0$

$\omega^2 \cdot C \cdot L = 1$

$\omega = \frac{1}{\sqrt{C \cdot L}}$



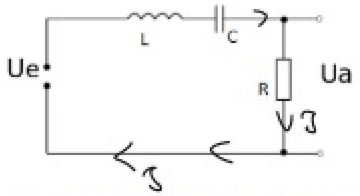
$I(t) = I_0 \cdot e^{i(\omega t + \underbrace{\phi)}_{\text{Phasenverschiebung}}}$

$U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}$ Phase

miro

Aufgabe 12.3 (2 P.): *Ein weiterer Filter*

Sie haben in der Vorlesung die Reihenschaltung aus Widerstand R, Spule L und Kondensator C kennengelernt. Eine Möglichkeit, sein Eingangssignal U_e zu filtern, ist es, die Spannung U_a (Ausgangssignal) am Widerstand R abzugreifen.



Bestimmen Sie U_a (und $|U_a|$) in Abhängigkeit zu U_e (und $|U_e|$) für den skizzierten Schaltkreis. Bestimmen Sie zudem die Phasenverschiebung ϕ zwischen Eingangs- und Ausgangssignal. Zeichnen Sie anschließend das Verhältnis aus U_a/U_e in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω.

$$J = \frac{U_e}{Z} \Rightarrow U_a = J \cdot R = \frac{U_e}{Z} \cdot R = \frac{U_e \cdot R}{R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L} = \frac{U_e \cdot R}{R + i \cdot \left(-\frac{1}{\omega C} + \omega L\right)} =$$

$$Z = R + Z_C + Z_L = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L$$

$$= \frac{U_e \cdot R \cdot \left(R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)}{\left(R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right) \cdot \left(R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)} =$$

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

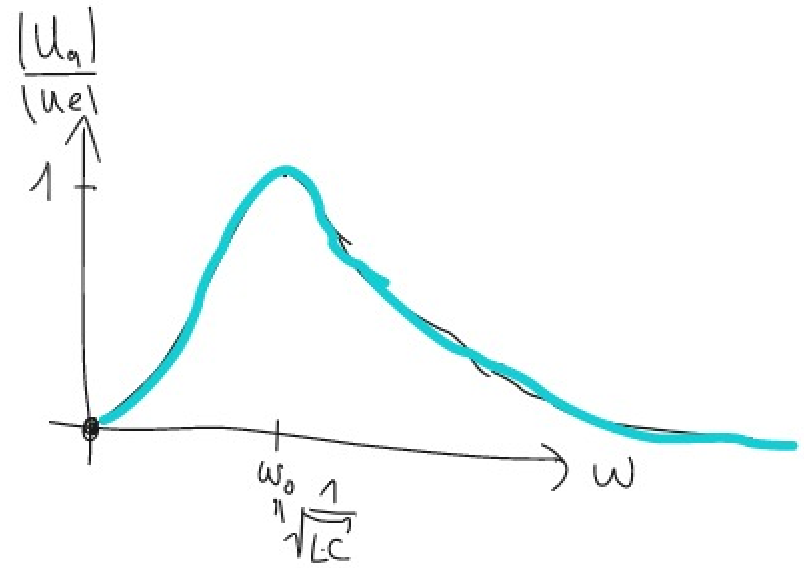
$$= \underbrace{\frac{R \cdot \left(R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}_{= F} \cdot U_e$$

$$|U_a| = \frac{R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot |U_e|$$

$$\left|\frac{z_1 z_4 \cdot z_2}{z_3}\right| = \frac{|z_1| \cdot |z_4|}{|z_3|} |z_2| \qquad = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot |U_e|$$

$$U_a = F \cdot U_e \Rightarrow \tan\phi = \frac{\mathrm{Im}(F)}{\mathrm{Re}(F)} = \frac{-\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R} = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

$$\frac{|U_a|}{|U_e|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$



$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad | \cdot \omega$$

$$\omega^2 L - \frac{1}{C} = 0$$

$$\omega^2 L = \frac{1}{C}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

miro