In den Aufgaben 9.) – 12.) sei $(E, \mathcal{G})$ eine Ebene, die die acht Axiome $(A1)$ – $(A8)$ erfüllt.

9.) Beweisen Sie Satz 3.20 der Vorlesung.

Hinweis: Benutzen Sie Satz 2.4 und Aufgabe 7.

(8 Punkte)

Satz 3.20:

Für vier paarweise verschiedene nicht kollineare Punkte $A, B, C, D \in E$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(I) Es gibt zwei parallele Geraden $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ und zwei parallele Geraden $h_1, h_2 \in \mathcal{G}$ mit

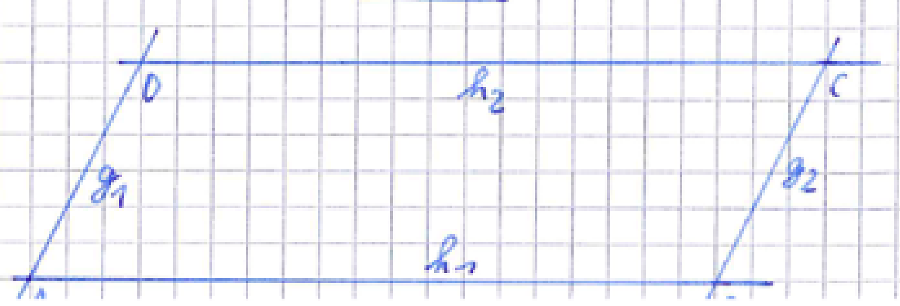
$$\{A\} = g_1 \cap h_1, \quad \{B\} = g_2 \cap h_1,$$
$$\{C\} = g_2 \cap h_2, \quad \{D\} = g_1 \cap h_2.$$

(II) Es gibt eine Verschiebung $\tau : E \to E$ mit:

$\tau(A) = B$ und $\tau(D) = C$.

Beweis: Siehe Aufgabe 9.

Skizze



Beweis:

ii) ⇒ i)

Es gelte also ii), d.h. wir finden eine Verschiebung $\tau : E \to E$ mit $\tau(A) = B$ und $\tau(D) = C$

Wähle
$$g_1 := g(A, D)$$
$$g_2 := g(B, C)$$
$$h_1 := g(A, B)$$
$$h_2 := g(C, D)$$

Woch z.: $g_1 \parallel g_2$

$$g_2 = g(B, C) = g(\tau(A), \tau(D)) \overset{\tau \text{ Bijektion und Axiom 1}}{=} \tau(g(A, D)) = \tau(g_1)$$

$$\Rightarrow g_2 = \tau(g_1) \underset{\text{Definition 2.2 (V1)}}{\Rightarrow} g_2 \parallel g_1$$

Woch z.: $h_1 \parallel h_2$

$$\left.\begin{aligned} h_2 = g(C, D) &= g(D, C) \\ &= g(D, \tau(D)) \\ h_1 = g(A, B) &= g(A, \tau(B)) \end{aligned}\right\}$$ sind parallel wegen Satz 2.4 ii) ⇒ h_1 und h_2 sind parallel