## Aufgabe 3 (6 Punkte)

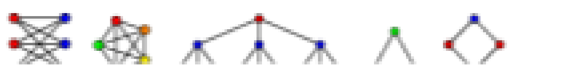
Schreiben Sie Ihre Antwort in das jeweilige Textfeld auf der linken Seite. Sie können rechts daneben auch eigene Freihandzeichnungen anfertigen.

1. Besitzt jeder einfache Graph mit der Gradsequenz (1, 3, 3, 3, 4, 4) eine Knotenfärbung mit maximal 4 Farben?

**Antwort** :

Die chromatische Zahl $\chi(G)$ von $G$ ist die minimale Anzahl von Farben, für die es eine Knotenfärbung von $G$ gibt, d.h.

$$\chi(G) := \min\{|c(V)| \mid c\colon V \to \mathbb{N} \text{ Knotenfärbung von } G\}$$



- Lemma:

  Für jeden einfachen Graphen $G = (V, E)$ gilt $\chi(G) \le \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}}$.

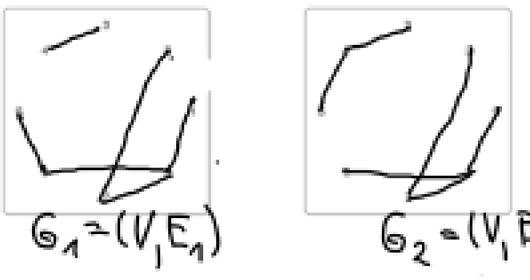
$X(G) \le \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{2 \cdot 9 + \frac{1}{4}} \approx 4{,}77$

$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4) = 9$

$\Rightarrow X(G) \le 4$

$\Rightarrow$ Es gilt Knotenfärbg mit maximal 4 Farben

2. Geben Sie zwei nicht isomorphe Realisierungen der Gradsequenz (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3) an. Zeichnen Sie hierfür die beiden Kantenrelationen in die folgenden beiden vorgegebenen Vorlagen.

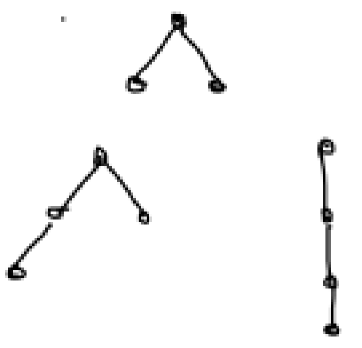


$G_1 = (V, E_1)$ $G_2 = (V, E_2)$

3. Gibt es einen Baum mit der Gradsequenz (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2)?

**Antwort** :

$\boxed{|V| - 1 = |E|}$



$|V| = 7$

$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$

$|V| - 1 = 6 \neq 5 = |E| \Rightarrow$ gibt keinen Baum

4. Gibt es einen einfachen Graphen mit der Gradsequenz (3, 3, 4, 4, 4, 4), der einen Hamiltonkreis besitzt?

**Antwort** :

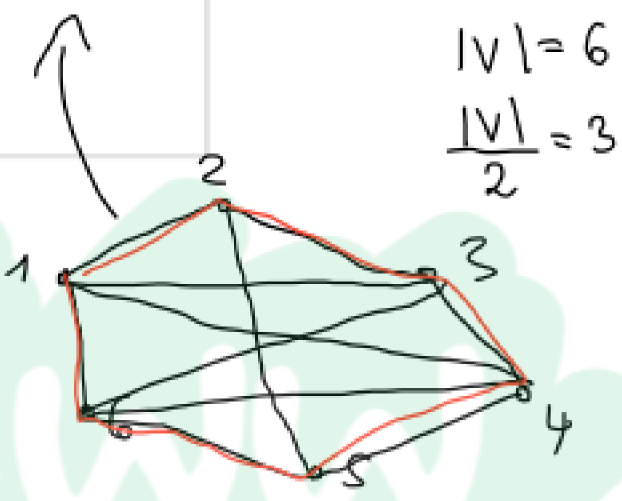
Hamiltonkreise: Existenz 142

- Beweis: Ein einfacher Graph $G = (V, E)$, in dem jeder Knoten mindestens Grad $\frac{|V|}{2}$ hat, enthält einen Hamiltonkreis.

$|V| = 6$

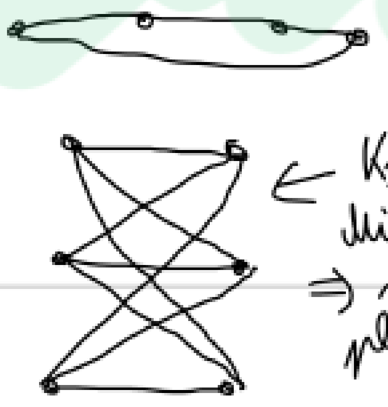
$\frac{|V|}{2} = 3$

$\Rightarrow$ Jeder Graph mit Gradsequenz (3, 3, 4, 4, 4, 4) hat Hamiltonkreis



5. Ist jeder einfache Graph mit der Gradsequenz (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3) planar?

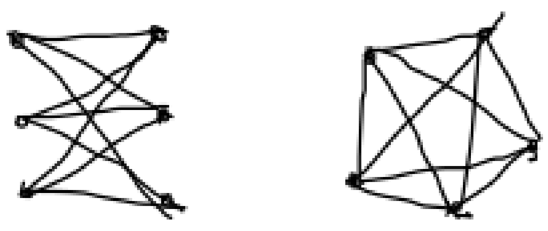
**Antwort** :



$\leftarrow$ $K_{3,3}$ ist Minor davon $\Rightarrow$ nicht planar

- Satz von Kuratowski:

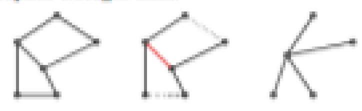
  Ein einfacher Graph $G = (V, E)$ ist genau dann planar, wenn weder der $K_{3,3}$ noch der $K_5$ ein Minor von $G$ ist.



$K_{3,3}$ $K_5$

- Definition: Für zwei gegebene einfache Graphen $H = (V_H, E_H)$ und $G = (V_G, E_G)$ sagt man, dass „$H$ ein Minor von $G$" ist, falls man aus $G$ schrittweise mittels
  - ▷ Entfernen von Kanten,
  - ▷ Entfernen von Knoten vom Grad 0 und
  - ▷ Kantenkontraktion

  einen zu $H$ isomorphen Graphen erzeugen kann.



## Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher, zusammenhängender, planarer, 4-regulärer Graph.

Weiterhin sei jede Fläche, in welche eine planare Einbettung von $G$ die euklidische Ebene unterteilt, entweder ein 4-Eck oder ein 3-Eck, wobei die Anzahl der 4-Ecke genau 10 beträgt.

Bestimmen Sie die Anzahl der 3-Ecke und anschließend die Anzahl der Knoten, der Kanten und der Flächen einer planaren Darstellung von $G$.

$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} \cdot |V| \cdot 4 = 2 \cdot |V|$

$\boxed{|E| = 2 \cdot |V|}$

- Satz: Eulersche Polyederformel (EPF)

  Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph. Sei $f$ die Anzahl der Flächen, in die $G$ bei überschneidungsfreier Darstellung die Zeichenebene zerschneidet. Dann gilt

  $$f - |E| + |V| = 2$$

$f - |E| + |V| = f - 2 \cdot |V| + |V| = f - |V| = 2 \Rightarrow |f| = 2 + |V|$