AUFGABE 2: *Bin Packing* 6P

Das Problem **Bin Packing** ist wie folgt definiert:

Gegeben k Behälter der Größe b und n Objekte mit den Größen $a_1, a_2, \dots, a_n \leq b, a_i \in \mathbb{N}$. Können diese Objekte so auf die k Behälter verteilt werden, dass keiner der Behälter überläuft?

Formal: $\exists$ Abbildung $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, k\}$, so dass für alle $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ gilt: $\sum_{f(i)=j} a_i \leq b$?

Zeigen Sie, dass Bin Packing NP-vollständig ist. Verwenden Sie für die Reduktion das NP-vollständige Problem **Partition**.

Partition: Gegeben n Zahlen $z_1, \dots, z_n$; $z_i \in \mathbb{N}$. Existiert eine Indexmenge $S \subseteq \{1 \dots n\}$, sodass $\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \in \{1 \dots n\} \setminus S} z_i$.

$S := \sum_{i=1}^{n} z_i$

$\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus S} z_i =: x$

$\Rightarrow x + x = z_1 + \dots + z_n = S$

$\Rightarrow 2x = S$

$\Rightarrow x = \frac{S}{2}$

Gesucht ist Reduktion: $g : \mathcal{J}_{Partition} \longrightarrow \mathcal{J}_{Bin\ Packing}$

Gegeben: $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{N}$

Gesucht: Teilmenge $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ sodass $\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus S} z_i$

$\longrightarrow$ Gegeben:

- $k = 100$, $b = 5500$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 5501$ falls $\frac{S}{2} \notin \mathbb{N}$
- $a_1 = z_1, \dots, a_n = z_n$, $k = 2$, $b = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{2}$ falls $\frac{S}{2} \in \mathbb{N}$

$g \in \mathcal{O}(n)$ ist klar!

$\Rightarrow g \in P$

$z_1 = 100$, $z_2 = 3$, $z_3 = 5$

gibt keine Lösung!

$\downarrow f$

$k = 2$, $b = \frac{S}{2} = 54$, $a_1 = z_1 = 100$, $a_2 = z_2 = 3$, $a_3 = z_3 = 5$

a_1 | $a_2 a_3$

$z_1 = 4$, $z_2 = 1$, $z_3 = 2$, $z_4 = 5$

$S = \{1, 3\}$, $\{1,2,3,4\} \setminus S = \{2, 4\}$

$z_1 + z_3 = 6$, $z_2 + z_4 = 1 + 5 = 6$ ✓

$\downarrow f$

$k = 2$, $b = 6$, $a_1 = z_1 = 4$, $a_2 = z_2 = 1$, $a_3 = z_3 = 2$, $a_4 = z_4 = 5$

a_1, a_3 | a_2, a_4

$z_1 = 2$, $z_2 = 3$, $z_3 = 5$

$S = \{1, 2\}$, $\{1,2,3\} \setminus S = \{3\}$

$z_1 + z_2 = 5$, $z_3 = 5$

$\downarrow f$

$k = 2 \in 2$ Behälter, $b = 5$, $a_1 = z_1 = 2$, $a_2 = z_2 = 3$, $a_3 = z_3 = 5$

a_1, a_2 | a_3

Für die Reduktion muss gelten:

$\forall \mathcal{J} \in \mathcal{J}_{Partition}$: $\mathcal{J}$ ist Ja-Instanz $\Leftrightarrow$ $g(\mathcal{J})$ ist Ja-Instanz für Bin-Packing

Zu „$\Rightarrow$": Sei $\underbrace{z_1, \dots, z_n \in \mathbb{N}}_{=\mathcal{J}}$ eine Ja-Instanz von Partition, d.h. wir finden $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ sodass $\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus S} z_i = \frac{S}{2} \in \mathbb{N}$

$f : \{1, \dots, n\} \to \{1, 2\}$

$i \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in S \\ 2 & \text{falls } i \in \{1,\dots,n\} \setminus S \end{cases}$

$g(\mathcal{J}) =$ $a_1, \dots, a_n = z_n$ (z_1), $b = \frac{S}{2}$, $k = 2$

$\sum_{i \in \{1,\dots,n\}: f(i)=1} a_i = \sum_{i \in S} a_i = \sum_{i \in S} z_i = \frac{S}{2} = b \leq b$ ✓

$\sum_{i \in \{1,\dots,n\}: f(i)=2} a_i = \sum_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus S} a_i = \sum_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus S} z_i = \frac{S}{2} = b \leq b$ ✓

$\Rightarrow g(\mathcal{J})$ Ja-Instanz von Bin-Packing

„$\Leftarrow$" Noch zu zeigen:

$\forall$ Nein-Instanzen $\mathcal{J} \in \mathcal{J}_{Partition}$: $g(\mathcal{J})$ Nein-Instanz von $\mathcal{J}_{Bin\text{-}Packing}$

Sei $\underbrace{z_1, \dots, z_n \in \mathbb{N}}_{=\mathcal{J}}$ $\in$ Nein-Instanz Partition.

1. Fall $\frac{S}{2} \notin \mathbb{N}$

a_3 passt nirgendwo rein!

$\Rightarrow g(\mathcal{J})$ ist Nein-Instanz von Bin-Packing

2. Fall $\frac{S}{2} \in \mathbb{N}$

angenommen $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, 2\}$ wäre Verteilung auf Behälter 1 u. 2.

und $\sum_{i: f(i)=1} a_i < b = \frac{S}{2}$ $\Rightarrow$ $\sum_{i: f(i)=2} a_i > \frac{S}{2}$ $\Rightarrow$ Behälter 2 überläuft

$z_1 = 1$

$\downarrow g$

$k = 2$, $b = 1$, $a_1 = 1$

$z_1 = 1$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1$

$\downarrow g$

$k = 2$, $b = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$

a_1 | a_2

$z_1 = 100$, $z_2 = 3$, $z_3 = 5$

$\downarrow g$

$k = 2$, $b = 54$, $a_1 = 100$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$

$\Rightarrow$ Bin Packing ist NP-hart

Noch zu zeigen:

Bin Packing $\in NP$

$\Rightarrow$ Bin Packing NP-vollständig

AUFGABE 3: *Zykluserkennung* 9P

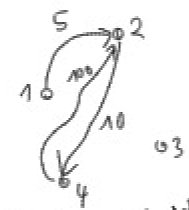
Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$. Jede Kante $e_i \in E$ besitze ein Gewicht $w_i \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass es NP-vollständig ist zu entscheiden, ob in G ein Zyklus $C = (e_1, \ldots, e_k, e_1)$ existiert, sodass dessen Kantengewichte sich zu 0 addieren, und sodass $(e_1, \ldots, e_k)$ keinen Zyklus enthält.

Verwenden Sie für die Reduktion eines der folgenden NP-vollständigen Probleme:

- Traveling Salesman Problem
- Vertex Cover
- Subset Sum

gegeben: $G=(V,E)$, $k \in \mathbb{N}$
gesucht: Teilmenge $S \subseteq V$ mit $|S| \leq k$ sodass $\forall$ Kanten $e \in E$: $e \cap S \neq \emptyset$

gegeben: $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$
gesucht: Teilmenge $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$: $\sum_{i \in S} a_i = b$

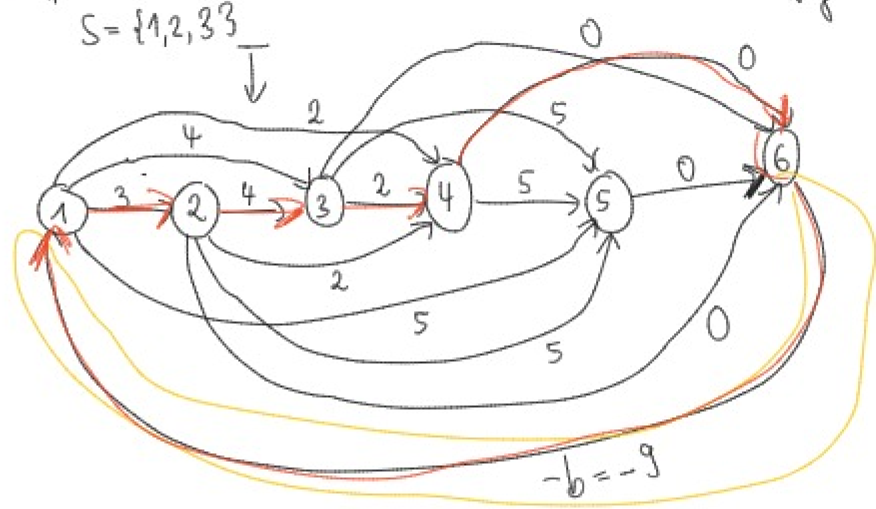


gegeben: gerichteter Graph $G=(V,E)$ und Gewichtsfunktion $c: E \to \mathbb{R}$ und maximale Weglänge $k \in \mathbb{R}$

gesucht: Rundtour mit Weg $\leq k$

$z_1 = 3$ $z_2 = 4$, $z_3 = 2$, $z_4 = 5$ $b = 9$

$S = \{1, 2, 3\}$



$g: \mathcal{I}_{\text{Subsetsum}} \to \mathcal{I}_{\text{Zyklus}}$

gegeben: $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ $\mapsto$ gegeben: $G = (V, E)$

wobei $V = \{1, \ldots, n+1\}$

$E = \{(n+1, 1)\} \cup$
$\cup \{(1,2), (1,3), \ldots, (1,n)\}$
$\cup \{(2,3), (2,4), \ldots, (2,n), (2,n+1)\}$
$\cup \{(3,4), (3,5), \ldots, (3,n), (3,n+1)\}$
$\vdots$
$\cup \{(n, n+1)\}$

$$c: E \to \mathbb{Z}$$

$$e \mapsto \begin{cases} -b & \text{falls } e = (n+1, 1) \\ z_1 & \text{falls } e = (1,2) \\ z_2 & \text{falls } e = (1,3) \\ z_3 & e = (1,4) \\ z_3 & \text{falls } e = (2,4) \\ z_4 & e = (3,5) \\ z_{j-1} & e = (i,j) \text{ falls } j \leq n \text{ und } i \in \{1, \ldots, j-1\} \\ 0 & e = (i,j) \text{ falls } j = n+1 \text{ und } i \in \{2, \ldots, n\} \end{cases}$$

gesucht: $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i \in S} z_i = b$

gesucht: Zyklus

- $g \in O(n^2)$ ✓