$$\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}5&*\\ *&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}-2&*\\ *&8\end{pmatrix}\right)$$

Anony

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Es sei K ein Körper. Eine Matrix $A \in K^{n,n}$ heißt *zentral*, wenn $AB = BA$ für alle $B \in K^{n,n}$ ist. Bestimme alle zentralen Matrizen in $K^{n,n}$.
Tipp: Betrachte die Basismatrizen E_{ij} für $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

$$E_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\in K^{3\times 3}$$

$$E_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\in K^{3\times 3}$$

$$\dim(K^{3\times 3})=9=3\cdot 3$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

$$A\cdot E_{12}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&4&0\\0&7&0\end{pmatrix}$$

$$A\cdot E_{23}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&5\\0&0&8\end{pmatrix}$$

Die j-te Spalte von $A\cdot E_{ij}$ ist gleich i-ten Spalte von A und die anderen Spalten von $A\cdot E_{ij}$ sind 0.

$$E_{12}\cdot A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5&6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Die i-te Zeile von $A\cdot E_{ij}$ ist gleich der j-ten Zeile von A und die anderen Zeilen von $A\cdot E_{ij}$ sind 0.

$$Z_n := \{A\in K^{n\times n} \mid \forall B\in K^{n\times n}: A\cdot B = B\cdot A\}$$

$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\notin Z_2$, weil $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

$E_n \in Z_n$, da $\forall B\in K^{n\times n}$: $E_n\cdot B = B = B\cdot E_n$

$\forall \delta\in K$: $\delta\cdot E_n \in Z_n$, da " $\delta E_n\cdot B = \delta\cdot B = B\cdot(\delta E_n)$

Behauptung: $Z_n = \langle E_n\rangle = \{\delta\cdot E_n \mid \delta\in K\}$

"$\supseteq$" gerade gezeigt

"$\subseteq$" Sei also $A\in Z_n$.
Noch zu zeigen: $A\in\langle E_n\rangle$

$$A\cdot E_{11}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&&0\\&0&\\0&&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\dots0\\a_{21}&&\\ \vdots&&0\\a_{n1}&&\end{pmatrix}$$

$$E_{11}\cdot A=\begin{pmatrix}1&&0\\&0&\\0&&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\\a_{21}&\ddots&\\&&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\0&&&\\ \vdots&&0&\\0&&&\end{pmatrix}$$

da $A\in Z_n$: $A\cdot E_{11} = E_{11}\cdot A$
$\Rightarrow a_{12}=\dots=a_{1n}=a_{21}=a_{31}=\dots=a_{n1}=0$

$$A\cdot E_{22}=A\cdot\begin{pmatrix}0&&0\\&1&\\0&&\ddots\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a_{12}&0&\\0&a_{22}&0&\\ \vdots&\vdots&&0\\0&a_{n2}&0&\end{pmatrix}$$

$$E_{22}\cdot A=\begin{pmatrix}0&&0\\&1&\\0&&\ddots\ 0\end{pmatrix}\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\0&0&\dots&0\\&&0&\end{pmatrix}$$

$A\cdot E_{22} = E_{22}\cdot A$
$\Rightarrow a_{12}=a_{32}=\dots=a_{n2}=a_{21}=a_{23}=\dots=a_{2n}=0$

Aus $A\cdot E_{ii}=E_{ii}\cdot A \Rightarrow a_{ij}=0$ für $i\neq j$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}a_{11}&&0\\&a_{22}&\\0&&\ddots\ a_{nn}\end{pmatrix}$$

Noch z.z.: $a_{11}=a_{22}=\dots=a_{nn}$
$(\Rightarrow A = a_{11}\cdot E_n \in \langle E_n\rangle)$

$$A\cdot E_{12}=\begin{pmatrix}&&\\&&\\&&\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\&&0&&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a_{11}&0&\\0&a_{21}&0&\\ \vdots&\vdots&\vdots&0\\0&a_{n1}&0&\end{pmatrix}$$

$$E_{12}\cdot A=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\&&0&&\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}&&\\&&\\&&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\0&0&\dots&0\\&0&&\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a_{11}=a_{22}$