c) $tr(A\cdot B\cdot C) = tr((A\cdot B)\cdot C) \overset{a)}{=} tr(C\cdot(A\cdot B))$
$= tr((C\cdot A)\cdot B)$
$= tr(B\cdot C\cdot A)$

Zu zeigen: $\neg(\forall n \in \mathbb{N}\ \forall A,B,C \in K^{n\times n}: tr(ABC) = tr(ACB))$, d.h.
$\underbrace{\exists n \in \mathbb{N}\ \exists A,B,C \in K^{n\times n}}_{\text{Gegenbeispiel}}: tr(ABC) \neq tr(ACB)$

Wähle $n := 2$
$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$
$B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$
$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$

$tr(A\cdot B\cdot C) =$
$=$
$tr(A\cdot C\cdot B) =$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$tr(A\cdot B) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) = tr\left(\begin{pmatrix} 5 & * \\ * & 1 \end{pmatrix}\right) = 6$
$tr(B\cdot A) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = tr\left(\begin{pmatrix} -2 & * \\ * & 8 \end{pmatrix}\right) = 6$
$\Rightarrow tr(A\cdot B) = tr(B\cdot A)$

$tr\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$
$= 1 + 5 + 9 = 15$

$\in K^{n\times n}$ $A\cdot B \neq B\cdot A$

$(A\cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot b_{lj}$

i-te Zeile von A

j-te Spalte von B

$(A\cdot B)_{ii} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot b_{li}$

$tr(A\cdot B) = \sum_{i=1}^{n} (A\cdot B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{il}\cdot b_{li}$

$tr(B\cdot A) = \sum_{i=1}^{n} (B\cdot A)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_{il}\cdot a_{li} =$
$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{li}\cdot a_{il}$
$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{il}\cdot b_{li} = tr(A\cdot B)$ ☒

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Es sei K ein Körper und $n \geq 1$. Die *Spur* einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in K^{n,n}$ ist definiert als

$$\operatorname{tr} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

a) Zeigen Sie: Die Abbildung $\operatorname{tr} : K^{n,n} \to K$ ist ein Epimorphismus von K-Vektorräumen.
b) Zeigen Sie: Für $A, B \in K^{n,n}$ ist $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
c) Gilt stets $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(ACB)$ für $A, B, C \in K^{n,n}$?

a) Zu zeigen: 1) tr ist lineare Abbildung
und 2) tr ist surjektiv

zu 2) $\forall y \in K\ \exists A \in K^{n\times n}: tr(A) = y$
Sei $y \in K$. Dann $tr\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} y & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots\ 0 \end{pmatrix}}_{=: A \in K^{n\times n}}\Bigg) = y$

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

zu 1) 1.1) $\forall A, B \in K^{n\times n}: tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
1.2) $\forall \alpha \in K\ \forall A \in K^{n\times n}: tr(\alpha\cdot A) = \alpha\cdot tr(A)$

zu 1.1) Sei also $A, B \in K^{n\times n}$
$tr(A+B) = tr\left(\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & & * \\ & a_{22}+b_{22} & \\ * & & \ddots\ a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}\right) = (a_{11}+b_{11}) + \ldots + (a_{nn}+b_{nn})$
$= \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$
$= tr(A) + tr(B)$

zu 1.2) Sei $\alpha \in K$, $A \in K^{n\times n}$
$tr(\alpha A) = tr\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & & * \\ & \alpha a_{22} & \\ * & & \ddots\ \alpha a_{nn} \end{pmatrix} = \alpha a_{11} + \ldots + \alpha a_{nn} =$
$= \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} = \alpha\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha\cdot tr(A)$ ☒