Aufgabe 2 (8 Punkte).

a) Zeige, dass

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^2$ und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen $\underbrace{(v_1, v_2)}_{\mathcal{B}}$ und $\underbrace{(w_1, w_2, w_3)}_{\mathcal{C}}$ durch die Matrix

$$_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{ccc} f(v_1) & & \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & f(v_2) \end{array}$$

gegeben ist. Bestimme die Matrix von f bezüglich der Standardbasen.

Die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren, d.h.

$f(v_1) = 3 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + 2 \cdot w_3$

$f(v_2) = 2 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + (-1) \cdot w_3$

ges.: $\quad {}_{\mathcal{E}_3}[f]_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 45 & \\ 20 & \\ 23 & \end{pmatrix}$, Spalten $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\mathcal{E}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\mathcal{E}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

I) $2\mu_1 + \mu_2 = 1 \Rightarrow \mu_2 = 1 - 2\mu_1$

II) $7\mu_1 + 4\mu_2 = 0$

in II) $7\mu_1 + 4(1 - 2\mu_1) = 0$

$-\mu_1 + 4 = 0$

$\mu_1 = 4$

$\mu_2 = -7$

$f(x+y) = ?$

$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\mu_1 \cdot \underset{\binom{2}{7}}{v_1} + \mu_2 \cdot \underset{\binom{1}{4}}{v_2}\right) =$

im Kopf $= f(4 \cdot v_1 + (-7) \cdot v_2) =$

$[= f(4 \cdot v_1) + f((-7) \cdot v_2) =]$

$= 4 f(v_1) - 7 f(v_2)$

$= 4 \cdot (3w_1 + 1w_2 + 2w_3) - 7 \cdot (2w_1 - w_3)$

$= (-2) w_1 + 4 \cdot w_2 + 15 w_3$

$= (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= \underline{45} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{20} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{23} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Kürzungslemma: V, W, X K-Vektorräume. $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen von V, W und X. $f: V \to W$, $g: W \to X$ linear.

Erweitern

$_{\mathcal{C}}[g \circ f]_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{C}}[g]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$

Verkettung Matrixmultiplikation

Kürzen

$_{\mathcal{E}_3}[f]_{\mathcal{E}_2} = {}_{\mathcal{E}_3}[id \circ f \circ id]_{\mathcal{E}_2} = {}_{\mathcal{E}_3}[id]_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[id]_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} =$

$_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$

$id(x) = x$

$id \circ f = f \circ id = f$

Basiswechselmatrizen

$=$

$_{\mathcal{E}_3}[id]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, Spalten $id(w_1)$, $id(w_2)$, $id(w_3)$

$id(w_1) = w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$_{\mathcal{B}}[id]_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$, Spalten $id\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $id\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$[f]$

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$id\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot v_1 + (-7) v_2$

$id\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \underset{= v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}} + 2 \cdot \underset{= v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}}$

$-7 + 8 = 1$