Aufgabe 1 (6 Punkte).
Es sei V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit $f \circ f = f$. Man zeige, dass dann gilt: $V = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.

Z.z.: 1) $V = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$, d.h.

$\forall v \in V \ \exists \underbrace{x \in \ker(f)}_{\text{d.h. } f(x)=0} \ \exists \underbrace{y \in \operatorname{im}(f)}_{\exists \tilde{x} \text{ mit } f(\tilde{x}) = y}$ sodass $v = x + y$

2) $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = \{\overset{\in V}{0}\}$

zu 1) Sei $v \in V$.

$$(f \circ f)(v) = f(f(v)) = f(v) \quad | -f(v)$$
$$f(f(v)) - f(v) = 0$$
$$f(f(v) - v) = 0$$

Wähle $x := v - f(v) \in \ker(f)$ $\quad y := v - x = v - (v - f(v)) = f(v) \in \operatorname{im}(f)$

$\Rightarrow x + y = v - f(v) + f(v) = v$ ✓

$f(v + w) = f(v) + f(w)$

im Kopf $f(\lambda v + \mu w) = f(\lambda v) + f(\mu w) = \lambda f(v) + \mu f(w)$

$f(v - w) = f(v) - f(w)$

Noch z.z.: $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = \{0\}$

Sei $x \in \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$.

Noch z.z.: $x = 0$

Da $x \in \operatorname{im}(f)$, so finden $\tilde{x} \in V$ sodass $f(\tilde{x}) = x$.

Da $x \in \ker(f)$, so ist $0 = f(x) = f(f(\tilde{x})) = f(\tilde{x})$

$\Rightarrow f(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow x = f(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow x = 0$ ✓

$x \in \ker f$, d.h. $f(x) = 0$

$f(-x) = (-1) \cdot \underbrace{f(x)}_{=0} = 0$

$\Rightarrow -x \in \ker(f)$