$A \to B \equiv \neg A \vee B$

$$\boxed{\begin{aligned} X \to \bot &\equiv \neg X \vee \bot \\ &\equiv \neg X \end{aligned}}$$

Hausaufgabe 1 2+13 Punkte

Wir definieren die Mengen $AL_1, AL_2 \subseteq AL$ induktiv wie folgt:

I • $\bot \in AL_1$, $X \to Y \in AL_1$ und $X \to \bot \in AL_1$ für alle $X, Y \in$ AVar

II • $X \vee Y \in AL_2$ für alle $X, Y \in$ AVar

Sei $\varphi_1 \in AL_1$ und $\psi_2 \in AL_2$. Dann gilt

III • $\varphi_1 \to \psi_2 \in AL_1$

IV • $\varphi_1 \vee \psi_2 \in AL_2$ und $\varphi_1 \wedge \psi_2 \in AL_2$

(i) Geben Sie eine Formel $\varphi_\bot \in AL_2$ mit $\varphi_\bot \equiv \bot$ an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie mit Hilfe struktureller Induktion: AL_1 ist eine Normalform.

$$i)\ \bot \equiv \neg X \wedge X \equiv \neg X \wedge \underbrace{(X \vee X)}_{\in AL_2 \ \uparrow \mathrm{II}} \equiv \underbrace{(X \to \bot)}_{\in AL_1 \ \uparrow \mathrm{I}} \wedge \underbrace{(X \vee X)}_{\in AL_2} \overset{\mathrm{IV}}{\in} AL_2$$

Normalformen. Eine Normalform der Aussagenlogik ist eine Klasse aussagenlogischer Formeln, so dass jede Formel in AL zu einer Formel in dieser Normalform äquivalent ist.

Die Aussagenlogik ist also induktiv über folgende Regeln definiert:

Basis (Grundmenge).

- $\top, \bot$ sind aussagenlogische Formeln.
- Jede Variable $X \in$ AVar ist eine aussagenlogische Formel.

$\top, \bot$ und die Variablen werden *atomare Formeln* oder *Atome* genannt.

Induktionsschritt (Regeln).

- Wenn $\varphi \in AL$ eine Formel ist, dann auch $\neg\varphi \in AL$
- Wenn $\varphi, \psi \in AL$ Formeln sind, dann auch

$$(\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \to \psi), \quad (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

$\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ werden *aussagenlogische Verknüpfungen* genannt.

Grammatik. $\varphi ::= \top \mid \bot \mid X \in \text{AVar} \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \mid (\varphi \leftrightarrow \varphi)$

ii) z.: AL_1 Normform

Induktionsanfang:

z.: $\top \in AL_1$

$$\top \equiv \top \vee (X \vee X) \equiv \neg(\bot) \vee (X \vee X) \equiv \underbrace{\bot}_{\in AL_1 \ \uparrow \mathrm{I}} \to \underbrace{(X \vee X)}_{\in AL_2 \ \uparrow \mathrm{II}} \overset{\mathrm{III}}{\in} AL_1 \ \checkmark$$

$A \to B \equiv \neg A \vee B$

$\bot \underset{\uparrow \mathrm{I}}{\in} AL_1 \ \checkmark$

Noch z.: $\forall X \in AVar: X \in AL_1$

Sei $X \in AVar$.

$$\begin{aligned} X &\equiv X \vee X \equiv \neg(\neg X) \vee X \\ &\equiv \neg X \to X \\ &\equiv \underbrace{(X \to \bot)}_{\in AL_1 \ \uparrow \mathrm{I}} \to \underbrace{(X \vee X)}_{\in AL_2 \ \uparrow \mathrm{II}} \overset{\mathrm{III}}{\in} AL_1 \end{aligned}$$

Wir definieren die Mengen $AL_1, AL_2 \subseteq AL$ induktiv wie folgt:

I • $\bot \in AL_1$, $X \to Y \in AL_1$ und $X \to \bot \in AL_1$ für alle $X, Y \in$ AVar

II • $X \vee Y \in AL_2$ für alle $X, Y \in$ AVar

Sei $\varphi_1 \in AL_1$ und $\psi_2 \in AL_2$. Dann gilt

III • $\varphi_1 \to \psi_2 \in AL_1$

IV • $\varphi_1 \vee \psi_2 \in AL_2$ und $\varphi_1 \wedge \psi_2 \in AL_2$

$\varphi_1 \to \psi_2 = \neg\varphi_1 \vee \psi_2$

Induktionsschritt (Regeln).

- Wenn $\varphi \in AL$ eine Formel ist, dann auch $\neg\varphi \in AL$
- Wenn $\varphi, \psi \in AL$ Formeln sind, dann auch

$$(\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \to \psi), \quad (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

$\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ werden *aussagenlogische Verknüpfungen* genannt.

Induktionsschritt:

z.: $\varphi \in AL_1 : \neg\varphi \in AL_1$

Sei $\varphi \in AL_1$.

$$\begin{aligned} \neg\varphi &\equiv \neg\varphi \vee \bot \equiv \neg\varphi \vee \overset{\text{aus } i)}{\varphi_\bot} \\ &\equiv \underset{\in AL_1}{\varphi} \to \underbrace{\varphi_\bot}_{\in AL_2 \ \uparrow i)} \overset{\mathrm{III}}{\in} AL_1 \end{aligned}$$

Wir definieren die Mengen $AL_1, AL_2 \subseteq AL$ induktiv wie folgt:

I • $\bot \in AL_1$, $X \to Y \in AL_1$ und $X \to \bot \in AL_1$ für alle $X, Y \in$ AVar

II • $X \vee Y \in AL_2$ für alle $X, Y \in$ AVar

Sei $\varphi_1 \in AL_1$ und $\psi_2 \in AL_2$. Dann gilt

III • $\varphi_1 \to \psi_2 \in AL_1$

IV • $\varphi_1 \vee \psi_2 \in AL_2$ und $\varphi_1 \wedge \psi_2 \in AL_2$

$\varphi_1 \to \psi_2 \equiv \neg\varphi_1 \vee \psi_2$

Noch z.: $\forall \varphi, \psi \in AL_1 : \varphi \vee \psi \in AL_1$

Sei $\varphi, \psi \in AL_1$.

$\varphi_\bot \in AL_2$

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi &\equiv (\varphi \vee \psi) \equiv \neg(\neg\varphi) \vee \psi \equiv \underbrace{\neg\varphi}_{\in AL_1} \to \overset{\in AL_1}{\psi} \ \overset{\mathrm{III}}{\in} \\ &\equiv \neg\varphi \to \underbrace{(\overset{\in AL_1}{\psi} \vee \overset{\in AL_2}{\varphi_\bot})}_{\in AL_2 \ \uparrow \mathrm{IV}} \overset{\mathrm{III}}{\in} AL_1 \end{aligned}$$

Noch z.: $\forall \varphi, \psi \in AL_1 : \varphi \wedge \psi \in AL_1$

Sei $\varphi, \psi \in AL_1$.

$$\varphi \wedge \psi = \neg(\neg\varphi) \wedge \neg(\neg\psi) = \underbrace{\neg(\underbrace{\neg\varphi}_{\in AL_1} \vee \underbrace{\neg\psi}_{\in AL_1})}_{\in AL_1} \in AL_1$$