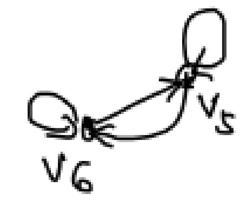
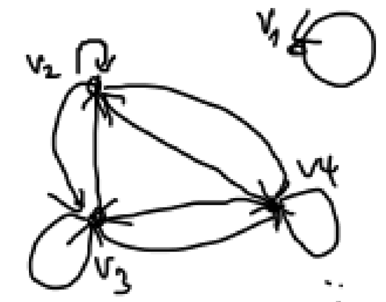


$[v_4] = \{v_2, v_3, v_4\} = [v_2] = [v_3]$

$[v_6] = [v_5] = \{v_5, v_6\}$



$[v_1] = \{v_1\}$
$[v_2] = \{v_2, v_3, v_4\}$

Äquivalenz:
Sei $a \in A$

Äquivalenzklasse mit Repräsentant A $\to [a] := \{b \in A \mid E^{\mathcal{A}}(a,b)\}$

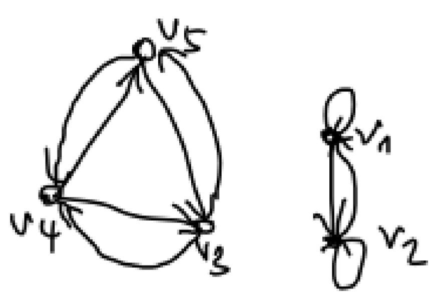
$E^{\mathcal{A}}$ hat höchstens 3 Äquivalenzklassen.

$E^{\mathcal{A}}$ hat genau 1 Äquivalenzklasse

$\exists x \forall y \; E(x,y)$

$E^{\mathcal{A}}$ hat höchsten 2 Äquivalenzklassen

$\exists x \exists y \forall z \; (E(x,z) \vee E(y,z))$



$[v_1] \cup [v_3] = V$
$\{v_1, v_2\}$ $\{v_3, v_4, v_5\}$

$E^{\mathcal{A}}$ hat höchstens 3 Äquivalenzkl

$\exists x \exists y \exists w \forall z \; (E(x,z) \vee E(y,z) \vee E(w,z))$

ii)

$\varphi := \forall x \, E(x,x) \wedge \forall x \forall y \, (E(x,y) \to E(y,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z \, (E(x,y) \wedge E(y,z) \to E(x,z))$
$\wedge \exists x \exists y \exists w \forall z (E(x,z) \vee E(y,z) \vee E(w,z))$

ii)

$E^{\mathcal{A}}$ Äquivalenzrelation, falls

- reflexiv: $\forall a \in A : E^{\mathcal{A}}(a,a)$
- symmetrisch: $\forall a, b \in A : E^{\mathcal{A}}(a,b) \Rightarrow E^{\mathcal{A}}(b,a)$
- transitiv: $\forall a, b, c \in A$: $E^{\mathcal{A}}(a,b) \wedge E(b,c) \Rightarrow E(a,c)$

Jedes Knoten hat genau einen Nachfolger

Jedes Knoten hat höchstens einen Vorgänger

Es gibt einen Knoten, der keinen Vorgänger hat

Hausaufgabe 2 6+4+4+2+8 = 24 Punkte

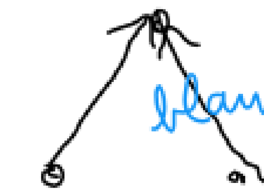
Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol E. Ermitteln Sie für die folgende FO[σ]-Formel, ob sie ein endliches Modell hat und ob sie ein unendliches Modell hat.

(i) $\varphi := \forall x \exists y (E(x,y) \wedge \forall z (z \neq y \to \neg E(x,z))) \wedge \forall x \forall y \forall z (E(x,z) \wedge E(y,z) \to x = y) \wedge \exists x \forall y \neg E(y,x)$

Geben Sie für die folgenden Aussagen jeweils einen Satz $\varphi \in$ FO[σ] an, sodass für eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ genau dann $\mathcal{A} \models \varphi$ gilt, wenn für $\mathcal{A}$ die Aussage gilt. Als Begründung für die Unteraufgaben *(ii)*, *(iii)* und *(iv)*, erklären Sie jeweils kurz wie ihre Formel die Aussage formalisiert.

(ii) $E^{\mathcal{A}}$ ist eine Äquivalenzrelation und in $E^{\mathcal{A}}$ gibt es höchstens drei Äquivalenzklassen.

(iii) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Struktur $\mathcal{G}$, welche ein ungerichteter Graph ist und für deren Universum U eine Bipartition $A \dot\cup B = U$ in zwei disjunkte, nicht leere Mengen existiert, sodass $(A \times B) \cup (B \times A) = E^{\mathcal{G}}$. ($\mathcal{A}$ soll also ein vollständig bipartiter Graph mit nicht leeren Farbklassen sein.)



blau nicht erfüllt

i)

Ein endliches Modell gilt es nicht!

für $x = v_1$ ist gelb erfüllt

Hausaufgabe 2 6+4+4+2+8 = 24 Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol E. Ermitteln Sie für die folgende FO[σ]-Formel, ob sie ein endliches Modell hat und ob sie ein unendliches Modell hat.

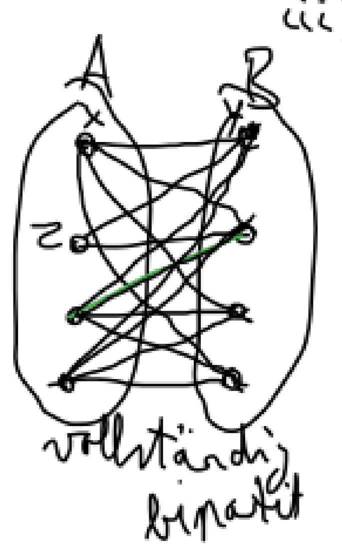
(i) $\varphi := \forall x \exists y (E(x,y) \wedge \forall z (z \neq y \to \neg E(x,z))) \wedge \forall x \forall y \forall z (E(x,z) \wedge E(y,z) \to x = y) \wedge \exists x \forall y \neg E(y,x)$

Geben Sie für die folgenden Aussagen jeweils einen Satz $\varphi \in$ FO[σ] an, sodass für eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ genau dann $\mathcal{A} \models \varphi$ gilt, wenn für $\mathcal{A}$ die Aussage gilt. Als Begründung für die Unteraufgaben *(ii)*, *(iii)* und *(iv)*, erklären Sie jeweils kurz wie ihre Formel die Aussage formalisiert.

(ii) $E^{\mathcal{A}}$ ist eine Äquivalenzrelation und in $E^{\mathcal{A}}$ gibt es höchstens drei Äquivalenzklassen.

(iii) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Struktur $\mathcal{G}$, welche ein ungerichteter Graph ist und für deren Universum U eine Bipartition $A \dot\cup B = U$ in zwei disjunkte, nicht leere Mengen existiert, sodass $(A \times B) \cup (B \times A) = E^{\mathcal{G}}$. ($\mathcal{A}$ soll also ein vollständig bipartiter Graph mit nicht leeren Farbklassen sein.)

$V = A \cup B$



iii) $\varphi := \forall a \forall b \, (E(a,b) \to E(b,a))$
$\wedge \forall x, y \, (E(x,y) \to (\forall z \, (E(z,y) \to \neg E(x,z))))$
$\wedge \forall x \exists y \, (E(x,y))$
$\wedge$