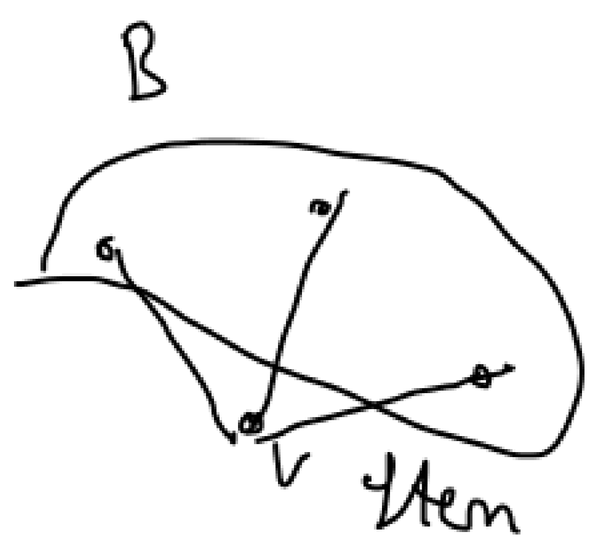
**Hausaufgabe 3** 8+4+12+8 = 32 Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol $E$. Wir fassen in dieser Aufgabe Graphen als $\sigma$-Strukturen auf, wobei wir $E$ als die Kantenrelation interpretieren.

Sei $B$ eine Menge und $v \notin B$. Ein *Stern* ist ein Graph $G$ mit Knotenmenge $B \cup \{v\}$ und Kantenmenge $\{\{v, b\} \mid b \in B\}$.

*(i)* Zeigen Sie: Die Klasse der endlichen Sterne ist nicht in FO[$\sigma$] definierbar, d.h.

Es gibt keine endliche Menge $\Phi$ von Sätzen, sodass




$\varphi = \forall y\, E(x,y)$ ← kein Satz, da frei($\varphi$) = x

$\varphi = \exists x \forall y\, E(x,y)$ ← Satz, da frei($\varphi$) = $\emptyset$

**Definition 5.32** Sei $\sigma$ eine Signatur und $\Phi \subseteq$ FO[$\sigma$] eine Menge von $\sigma$-Sätzen.

(1) Die *Modellklasse* von $\Phi$, geschrieben Mod($\Phi$), ist die Klasse aller $\sigma$-Strukturen $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models \Phi$. Falls $\Phi := \{\varphi\}$ nur einen Satz enthält, schreiben wir kurz Mod($\varphi$).

(3) Eine Klasse $\mathcal{C}$ von $\sigma$-Strukturen ist *axiomatisierbar* (in der Prädikatenlogik), oder FO-*axiomatisierbar*, wenn $\mathcal{C}$ = Mod($\Phi$) für eine Menge $\Phi \subseteq$ FO[$\sigma$]. Wenn es eine endliche Menge $\Phi$ mit $\mathcal{C}$ = Mod($\Phi$) gibt, so heißt $\mathcal{C}$ *endlich axiomatisierbar* (in der Prädikatenlogik) oder *definierbar* (in der Prädikatenlogik). ⊣

Jede Kante hat x als Endpunkt

$\varphi$ = Es gibt Knoten, der mit allen anderen verbunden ist und nur von diesen Knoten aus ∧ ungerichteter Graph

$$\exists x \big(\forall y (\neg E(x,y) \to x = y) \wedge \forall y \forall z (E(y,z) \to y = x \vee z = x)\big) \wedge \forall x \forall y \big(E(x,y) \to E(y,x)\big)$$

Mod($\Phi$) = Klasse aller Sterne ≠ Klasse aller endlichen Sterne

Es gibt 3 Knoten — ohne das wär nichts in 3 Knoten

$$\exists x \exists y \exists q \big(x \neq y \wedge x \neq q \wedge y \neq q \wedge \forall z (x = z \vee y = z \vee y = q)\big)$$

**Definierbarkeit in der Prädikatenlogik.** $m$-Äquivalenz eignet sich besser als elementare Äquivalenz zum Beweis der Nicht-Definierbarkeit bestimmter Aussagen. Wenn wir zeigen wollen, dass Erreichbarkeit nicht in der Prädikatenlogik definierbar ist, reicht es, für alle $m$ zwei $\sigma$-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m$ zu finden, sodass

- es in $\mathcal{A}_m$ einen Weg von $s$ nach $t$ gibt, in $\mathcal{B}_m$ aber nicht und
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$.

Allgemeiner können wir Folgendes zeigen.

**Lemma 6.14** *Sei $\sigma$ eine Signatur und $\mathcal{C}$ eine Klasse von $\sigma$-Strukturen. Falls es für alle $m \geqslant 1$ zwei $\sigma$-Strukturen $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{B}_m$ gibt, sodass*

- *$\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$, $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$ und*
- *$\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,*

*dann gibt es keinen Satz $\varphi \in$ FO[$\sigma$], der $\mathcal{C}$ definiert, d.h. es gibt kein $\varphi \in$ FO[$\sigma$] mit* Mod($\varphi$) = $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ = Klasse der endlichen Sterne