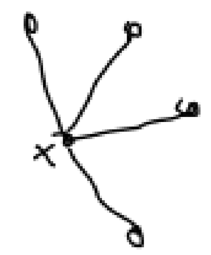


Hausaufgabe 3 8+4+12+8 = 32 Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol E. Wir fassen in dieser Aufgabe Graphen als σ-Strukturen auf, wobei wir E als die Kantenrelation interpretieren.

Sei B eine Menge und $c \notin B$. Ein *Stern* ist ein Graph G mit Knotenmenge $B \cup \{c\}$ und Kantenmenge $\{\{c,b\} \mid b \in B\}$.

(i) Zeigen Sie: Die Klasse der endlichen Sterne ist nicht in FO[σ] definierbar.

Korollar 6.26 *Sei σ eine endliche, relationale Signatur, $\mathcal{K}$ eine Klasse von σ-Strukturen und $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *$\mathcal{C}$ ist nicht in $\mathcal{K}$ FO-definierbar.*

(2) *Für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt es $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ und $\mathcal{B}_m \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{C}$ mit $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$.*

(3) *Für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt es $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ und $\mathcal{B}_m \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{C}$, sodass die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m)$ gewinnt.*

S = Menge der Sterne

$\varphi = \exists x \forall y \, (x \neq y \rightarrow E(x,y))$ alles mit x verbunden

$\land \forall x \, \neg E(x,x)$ keine Schleifen

$\land \forall x \forall y \, (E(x,y) \rightarrow E(y,x))$ ungerichtet

S' = Menge der endlichen Menge

Zu zeigen: S' nicht in FO$\{\sigma\}$ definierbar

Dazu zeigen wir Korollar 6.26 (3), d.h.
$\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m$ sodass $\mathcal{A}_m \in S'$ und $\mathcal{B}_m \notin S'$ und die Duplikatorin gewinnt das Spiel $\mathcal{G}_m(\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m)$.

Spiel $\mathcal{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ hat m Runden, In Runde $i = 1, \dots, m$

- wählt zunächst der Herausforderer entweder ein Element $a_i' \in A$ oder $b_i' \in B$.
- Danach antwortet die Duplikatorin. Hat der Herausforderer ein $a_i' \in A$ gewählt, wählt nun die Duplikatorin ein $b_i' \in B$. Andernfalls wählt sie $a_i' \in A$.

Nach Runde m wird der Gewinner ermittelt: Die Duplikatorin hat gewonnen, wenn die Abbildung

$$h : a_1 \mapsto b_1, \dots, a_k \mapsto b_k, a_1' \mapsto b_1', \dots, a_m' \mapsto b_m'$$

ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist.

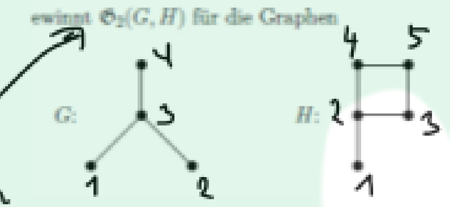
Definition 6.15 Sei σ eine (relationale) Signatur. Ein *partieller Isomorphismus* zwischen zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ist eine injektive Abbildung $h : A' \to B$, wobei $A' \subseteq A$, sodass für alle

- $k \geqslant 0$ und alle
- k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma \cup \{=\}$ und alle
- $a_1, \dots, a_k \in A'$

gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad (h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}. \qquad \dashv$$

...ewinnt $\mathfrak{G}_2(G, H)$ für die Graphen



2 Runden

$a_1' = 3 \quad b_1' = 2$

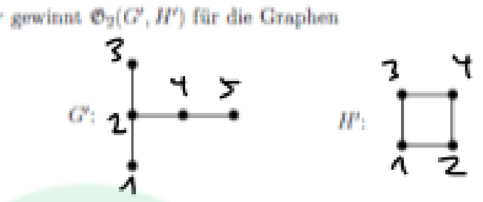
$a_2' = 1 \quad b_2' = 1$

h: $3 \to 2$, $1 \to 1$ h injektiv

$(1,3) \in E$ und $(\underset{1}{h(1)}, \underset{2}{h(3)}) \in E$

$\Rightarrow$ Duplikator gewinnt

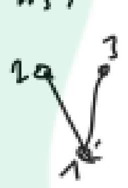
(2) *Duplikator* gewinnt $\mathfrak{G}_2(G', H')$ für die Graphen

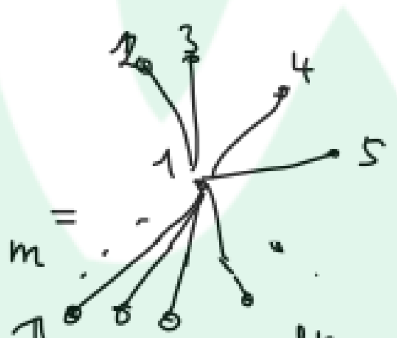


$a_1' = 4 \quad b_1' = 1$

$a_2' = 3 \quad b_2' = 4$

$\Rightarrow$ Duplikator

Für $m = 3$: $\mathcal{A}_m =$ 

$\mathcal{B}_m =$ 

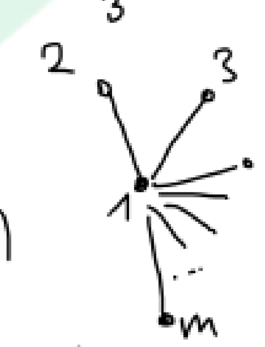
unendliche Stern

$\mathcal{B}_m \notin S$

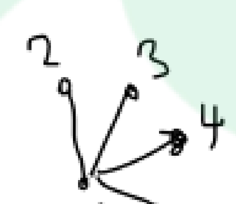
$a_1' = 1 \quad b_1' = 1$

$a_2' = 4 \quad b_2' = 4$

$a_3' = 3 \quad b_3' = 100$

Allgemein $\mathcal{A}_m := (A_m, E^{\mathcal{A}_m})$ 

$\Rightarrow |A_m| = m$ ($\Rightarrow$ Wir können m Runden spielen)

$\mathcal{B}_m = (B_m, E^{\mathcal{B}_m})$ 

$B_m = \mathbb{N}$

$E^{\mathcal{B}_m} = \{\{1, n\} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 2}\}$

$\Rightarrow$ Duplikatorin gewinnt $\mathcal{G}_m(\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m)$ immer!, indem sie 1 wählt, wenn Herausforderer 1 wählt und falls Herausforderer nicht 1 wählt, sie auch nicht!

$\underset{\text{Korollar 6.26 (3)}}{\Rightarrow}$ S' ist nicht in FO$\{\sigma\}$ definierbar!