Aufgabe 1

Sei $\sigma = (E)$, also die Signatur der (gerichteten) Graphen.

Sei $k \geq 2$. Als *k-Clique* eines ungerichteten Graphen $\mathfrak{G} = (V, E^{\mathfrak{G}})$ bezeichnet man k Knoten $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$, zwischen denen sämtliche Kanten vorhanden sind, d.h. $\{(v_i, v_j) \mid 1 \leq i, j \leq k \text{ und } i \neq j\} \subseteq E^{\mathfrak{G}}$.

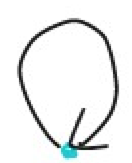
$x \neq y \;=\; \neg(x = y)$

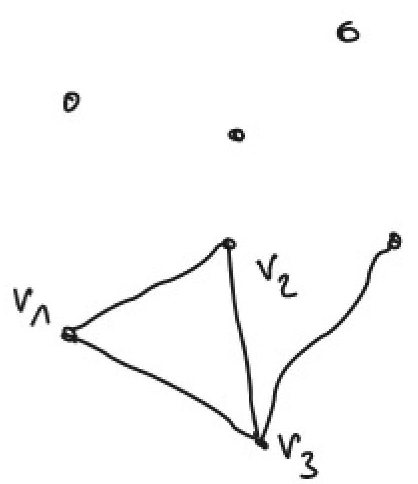
a) Geben Sie eine σ-Formel $\psi(v_1, v_2, v_3)$ an, die ausdrückt: Es gibt genau eine Kante von dem Teilgraphen, der aus den Knoten v_1, v_2 und v_3 besteht, zum Rest des Graphen.
Genauer: Es gibt genau einen Knoten w, der verschieden von v_1, v_2 und v_3 ist, sodass es eine Kante von ~~mindestens~~ einem der drei Knoten zu w und keine Kante von den anderen beiden Knoten zu w gibt.

a)

$$\begin{aligned}
\psi(v_1, v_2, v_3) = \exists w \big(& w \neq v_1 \land w \neq v_2 \land w \neq v_3 \land \\
& (E(w, v_1) \land \neg E(w, v_2) \land \neg E(w, v_3) \lor \\
& \;\; E(w, v_2) \land \neg E(w, v_1) \land \neg E(w, v_3) \lor \\
& \;\; E(w, v_3) \land \neg E(w, v_1) \land \neg E(w, v_2)) \land \\
& \forall z \, (z = w \lor z = v_1 \lor z = v_2 \lor z = v_3 \\
& \quad \lor \neg(E(z, v_1) \land \neg E(z, v_2) \land \neg E(z, v_3) \lor \\
& \quad\quad E(z, v_2) \land \neg E(z, v_1) \land \neg E(z, v_3) \lor \\
& \quad\quad E(z, v_3) \land \neg E(z, v_1) \land \neg E(z, v_2))) \big)
\end{aligned}$$

Schleife





b) Geben Sie einen σ-Satz φ an, der ausdrückt, dass der Graph ungerichtet und schleifenfrei ist und jeder Knoten im Graphen Teil einer 3-Clique ist, von der aus es genau eine Kante zum Rest des Graphen gibt (im Sinne von Aufgabenteil a). Sie können in dieser Formel $\psi(v_1, v_2, v_3)$ verwenden.

$$\varphi := \underline{\forall x, y \, (E(x, y) \rightarrow E(y, x))} \land$$ ← ungerichteter graph

$$\land \; \underline{\forall x \, (\neg E(x, x))}$$ ← schleifenfrei

$$\land \; \forall v_1 \, \exists v_2 \, \exists v_3 \, (v_1 \neq v_2 \land v_2 \neq v_3 \land v_1 \neq v_3 \land E(v_1, v_2) \land E(v_1, v_3) \land E(v_2, v_3) \land \psi(v_1, v_2, v_3))$$

Sei dazu $\sigma_{\mathrm{GoL}} := (\mathsf{Life}^3, \leq^2; +^2, -^2; 0, 1)$ gegeben.

Sie sollen in den untenstehenden Teilaufgaben schrittweise einen Satz φ_{GoL} konstruieren, der ausdrückt, dass die Relation Life genau den Regeln des Spiels des Lebens entspricht. Dabei beschränken wir uns auf Strukturen mit dem Universum $\mathbb{Z}$, in denen die nicht-logischen Symbole wie für $\mathbb{Z}$ „üblich" interpretiert werden. Weiterhin bedeutet $(x,y,t) \in \mathsf{Life}^{\mathcal{A}}$ für $x,y,t \in \mathbb{Z}$, dass die Zelle an Position (x,y) zum Zeitpunkt t lebendig ist. Zu negativen Zeitpunkten sollen alle Zellen tot sein. Die Konfiguration zum Zeitpunkt 0, also die *Startkonfiguration*, darf beliebig sein. Auf diese Weise können sich durch verschieden gewählte Startkonfigurationen verschiedene Abläufe des Spiels des Lebens ergeben.

Formal bedeutet das, dass φ_{GoL} folgendes ausdrücken soll:

- für alle $x,y,t \in \mathbb{Z}$ mit $t < 0$ ist $(x,y,t) \notin \mathsf{Life}^{\mathcal{A}}$,
- für alle $x,y,t \in \mathbb{Z}$ mit $t > 0$ ist $(x,y,t) \in \mathsf{Life}^{\mathcal{A}}$, falls die Zelle an Position (x,y) zum Zeitpunkt t gemäß der Regeln des Spiels des Lebens lebt.

Letzteres bedeutet genauer, dass die Zelle an Position (x,y) entweder auch zum Zeitpunkt $t-1$ lebte und außerdem 2 oder 3 ihrer 8 Nachbarn lebendig waren, oder diese Zelle zum Zeitpunkt $t-1$ nicht lebendig war und genau 3 ihrer 8 Nachbarn lebendig waren. Nachbarn einer Zelle an Position (x,y) sind alle Zellen an Positionen (x',y') mit $|x-x'| \leq 1$, $|y-y'| \leq 1$ und $(x,y) \neq (x',y')$.

Hinweis: Sie können große Konjunktionen und Disjunktionen auch über beliebige Indexmengen bilden. Beispielsweise kann statt $\mathsf{Life}(x,y+1,t) \wedge \mathsf{Life}(x+1,y+1,t) \wedge \mathsf{Life}(x+2,y+1,t) \wedge \mathsf{Life}(x+3,y+1,t)$ auch kurz

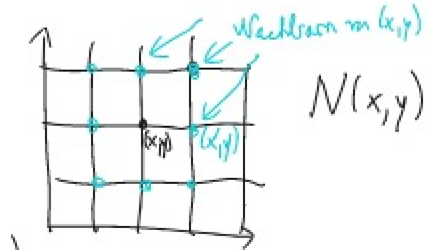
$$\bigwedge_{(i,j) \in \{(a,1) \mid 0 \leq a \leq 3\}} \mathsf{Life}(x+i, y+j, t)$$

geschrieben werden.

a) Geben Sie prädikatenlogische Formeln $\varphi_2(x,y,t)$ und $\varphi_3(x,y,t)$ an, sodass für σ_{GoL}-Strukturen $\mathcal{A}$ wie oben beschrieben $\mathcal{A} \models \varphi_i(x,y,t)$ genau dann gilt, wenn in der Relation $\mathsf{Life}^{\mathcal{A}}$ die Zelle an Position (x,y) zum Zeitpunkt t genau i lebendige Nachbarn hat.

Hinweis: In diesem Aufgabenteil müssen Sie nicht überprüfen, ob die Einträge zum Zeitpunkt t in $\mathsf{Life}^{\mathcal{A}}$ gemäß den Regeln des Spiels des Lebens aus den Einträgen zum Zeitpunkt $t-1$ hervorgehen. *(Eine Eigenschaft wird in Aufgabenteil c) formalisiert.)*

$N(x,y) := \{(x',y')$



$N(x,y) := \{(x',y') \in \mathbb{Z}^2 \mid |x'-x| \leq 1 \wedge |y'-y| \leq 1 \wedge (x \neq x' \vee y \neq y')\}$

$\varphi_2(x,y,t) :=$

$\exists (x_1',y_1') \in N(x,y)\ \exists (x_2',y_2') \in N(x,y)$

$\Big(\mathit{Life}(x_1',y_1',t) \wedge \mathit{Life}(x_2',y_2',t) \wedge (x_1' \neq x_2' \vee y_1' \neq y_2') \wedge$

$\forall (z_1,z_2) \in N(x,y) \big((z_1 = x_1' \wedge z_2 = y_1') \vee (z_1 = x_2' \wedge z_2 = y_2') \vee \neg \mathit{Life}(z_1,z_2,t) \big) \Big)$

$\varphi_3(x,y,t) :=$

$\exists (x_1',y_1')\ \exists (x_2',y_2')\ \exists (x_3',y_3')\ \Big(N(x,y,x_1',y_1') \wedge N(x,y,x_2',y_2') \wedge N(x,y,x_3',y_3')$

$\mathit{Life}(x_1',y_1',t) \wedge \mathit{Life}(x_2',y_2',t) \wedge \mathit{Life}(x_3',y_3',t) \wedge$

$(x_1' \neq x_2' \vee y_1' \neq y_2') \wedge (x_1' \neq x_3' \vee y_1' \neq y_3') \wedge (x_2' \neq x_3' \vee y_2' \neq y_3') \wedge$

$\forall (z_1,z_2) \big(\neg N(x,y,z_1,z_2) \vee (z_1 = x_1' \wedge z_2 = y_1') \vee (z_1 = x_2' \wedge z_2 = y_2') \vee (z_1 = x_3' \wedge z_2 = y_3')$

$\vee \neg \mathit{Life}(z_1,z_2,t) \big) \Big)$

gilt genau dann, wenn (x',y') Nachbar von (x,y)

$N(x,y,x',y') := (x \neq x' \vee y = y') \wedge$

$\wedge\ x - x' \leq 1\ \wedge$

$\wedge\ x' - x \leq 1\ \wedge$

$\wedge\ y - y' \leq 1\ \wedge$

$\wedge\ y' - y \leq 1$

$|x - x'| \leq 1$

$\Leftrightarrow$

$-1 \leq x - x' \wedge x - x' \leq 1$

$\Downarrow \cdot(-1)$

$1 \geq -x + x'$

$x' - x \leq 1$

b) Geben Sie einen prädikatenlogischen Satz $\varphi_{t \geq 0}$ an, der für σ_{GoL}-Strukturen $\mathcal{A}$ wie oben beschrieben angibt, dass $(x,y,t) \notin \mathsf{Life}^{\mathcal{A}}$ für alle $x,y,t \in \mathbb{Z}$ mit $t < 0$.

$\varphi_{t \geq 0} = \forall x,y,t\ (0 \leq t \vee \neg \mathit{Life}(x,y,t))$

c) Benutzen Sie die beiden Formeln aus den Aufgabenteilen a) und b) um nun den gewünschten Satz φ_{GoL} zu konstruieren.

$\varphi_{GoL} := \varphi_{t \geq 0} \wedge$

$\forall x,y,t\ \Big($

$\mathit{Life}(x,y,t) \rightarrow \Big(\big(\mathit{Life}(x,y,t-1) \wedge (\varphi_2(x,y,t-1) \vee \varphi_3(x,y,t-1)) \big) \vee$

$\big(\neg \mathit{Life}(x,y,t-1) \wedge \varphi_3(x,y,t-1) \big) \Big) \Big)$

Formal bedeutet das, dass φ_{GoL} folgendes ausdrücken soll:

- für alle $x,y,t \in \mathbb{Z}$ mit $t < 0$ ist $(x,y,t) \notin \mathsf{Life}^{\mathcal{A}}$,
- für alle $x,y,t \in \mathbb{Z}$ mit $t > 0$ ist $(x,y,t) \in \mathsf{Life}^{\mathcal{A}}$, falls die Zelle an Position (x,y) zum Zeitpunkt t gemäß der Regeln des Spiels des Lebens lebt.

Letzteres bedeutet genauer, dass die Zelle an Position (x,y) entweder auch zum Zeitpunkt $t-1$ lebte und außerdem 2 oder 3 ihrer 8 Nachbarn lebendig waren, oder diese Zelle zum Zeitpunkt $t-1$ nicht lebendig war und genau 3 ihrer 8 Nachbarn lebendig waren. Nachbarn einer Zelle an Position (x,y) sind alle Zellen an Positionen (x',y') mit $|x-x'| \leq 1$, $|y-y'| \leq 1$ und $(x,y) \neq (x',y')$.