Aufgabe 3 (5 Punkte):

Man betrachte ein masseloses Karussell welches mit der Winkelgeschwindigkeit ω, rotiert. Die Fahrgäste sind anfangs gleichförmig im Abstand R vom Zentrum des Karusells verteilt. Sie sind als punktförmig zu betrachten und Ihre Gesamtmasse beträgt M. Was passiert wenn sich alle Passagiere dem Zentrum auf $R/2$ nähern?

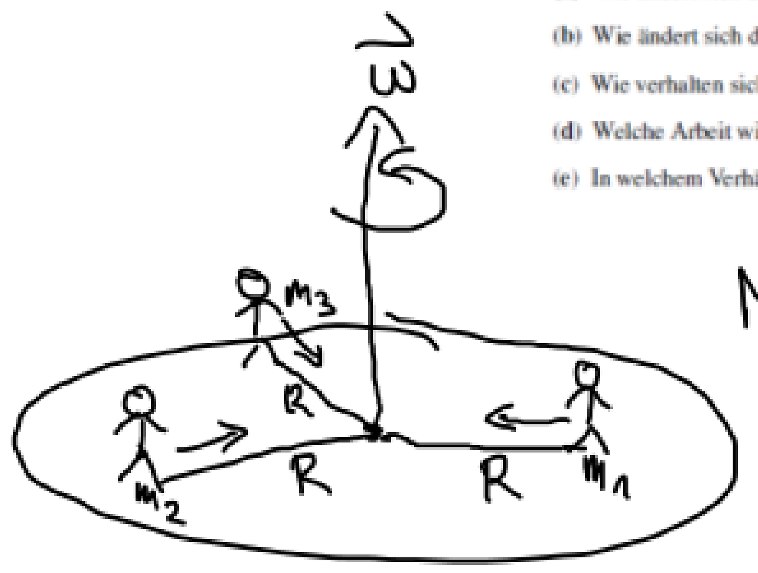
(a) Wie ändert sich der Drehimpuls?

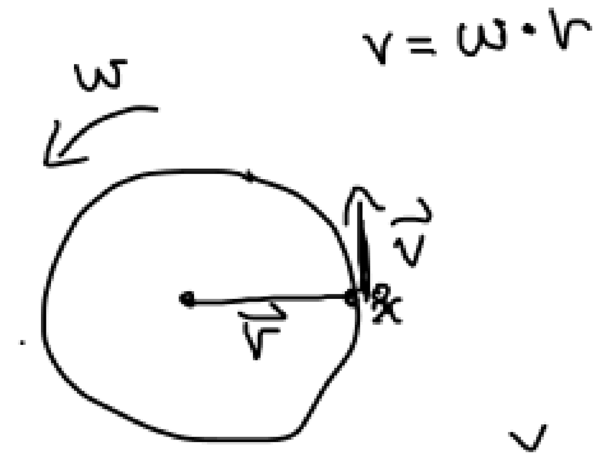
(b) Wie ändert sich die Winkelgeschwindigkeit?

(c) Wie verhalten sich die Rotationsenergien(vorher/nachher)?

(d) Welche Arbeit wird beim Positionswechsel verrichtet?

(e) In welchem Verhältnis stehen die verrichtete Arbeit und die Differenz der Rotationsenergien?





$M = m_1 + m_2 + m_3$

a)

$\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$

$L = m \cdot r \cdot v$

$L_{vorher} = m_1 \cdot R \cdot \underbrace{\omega \cdot R}_{v} + m_2 R \cdot \underbrace{\omega \cdot R}_{v} + m_3 \cdot R \cdot \underbrace{\omega \cdot R}_{v}$

$= \omega R^2 \cdot (m_1 + m_2 + m_3)$

$= \omega R^2 \cdot M$

$L_{nachher} = m_1 \frac{R}{2} \cdot v + m_2 \frac{R}{2} \cdot v + m_3 \frac{R}{2} \cdot v =$

$= m_1 \cdot \frac{R}{2} \cdot \omega \cdot \frac{R}{2} + \dots$

$= \omega \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot M = \frac{\omega R^2 \cdot M}{4} = \frac{L_{vorher}}{4}$

$\boxed{L_{nachher} = \frac{1}{4} \cdot L_{vorher}}$

b) ω bleibt gleich ← Karussell wird vom Motor angetrieben

c) $E_{rot,vorher} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 =$

$= \frac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot R^2 + m_2 \cdot R^2 + m_3 \cdot R^2) \cdot \omega^2$

$= \frac{1}{2} M \cdot R^2 \cdot \omega^2$

$J = \int_V m(\vec{r}) \cdot r_\perp^2(\vec{r}) \, d\tau(\vec{r})$

$E_{rot,nachher} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \omega^2 = \frac{\frac{1}{2} M R^2 \cdot \omega^2}{4} = \frac{E_{rot,vorher}}{4}$

$\Rightarrow \boxed{E_{rot,nachher} = \frac{1}{4} \cdot E_{rot,vorher}}$

$|\vec{v} \cdot \vec{u}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{u}))$

$F_z = m \cdot R \cdot \omega^2$

$W = F_z \cdot \frac{R}{2}$

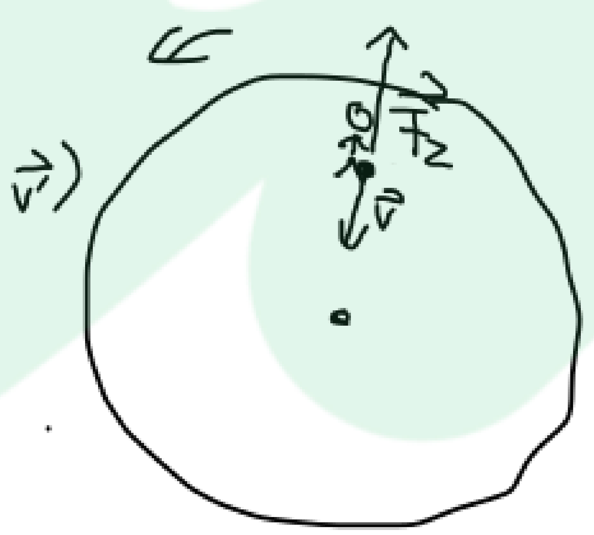
$= m \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \frac{R}{2}$

$= \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$

$\vec{F} \cdot \underbrace{\vec{r}_1(t)\, dt}_{Weg}$

Skalarprodukt

$F_c = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v})$



e.) $\Delta E_{rot} = E_{rot,nachher} - E_{rot,vorher}$

$= \frac{1}{4} E_{rot,vorher} - E_{rot,vorher}$

$= \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \frac{1}{2} M R^2 \cdot \omega^2$

$= -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \cdot \omega^2 = -\frac{3}{8} M R^2 \omega^2 < 0$

d) $W = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 > 0$ ← die Arbeit kommt vom Karussell-Menschen in des Lyten Karussell Rände!

$\frac{W}{\Delta E_{rot}} = \frac{\frac{1}{2} \cancel{M R^2 \omega^2}}{-\frac{3}{8} \cancel{M R^2 \omega^2}} = -\frac{8}{2 \cdot 3} = -\frac{4}{3}$