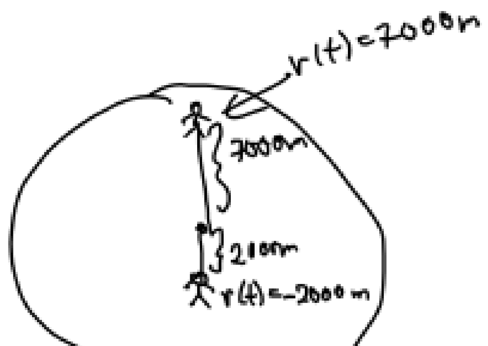


Aufgabe 1 (5 Punkte):

Direkt nach dem Anpfiff eines Fußballspiels tut sich unter dem Schiedsrichter ein Loch auf, das schnurgerade durch den Erdmittelpunkt auf die andere Seite der Erde führt. Nehmen Sie im folgenden an, dass die Erde (Masse $M = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg) eine Kugel mit dem Radius $R = 6{,}378 \cdot 10^6$ m sei und eine homogene Masseverteilung habe. Im Inneren der Erde gilt in guter Näherung das Gravitationspotential:

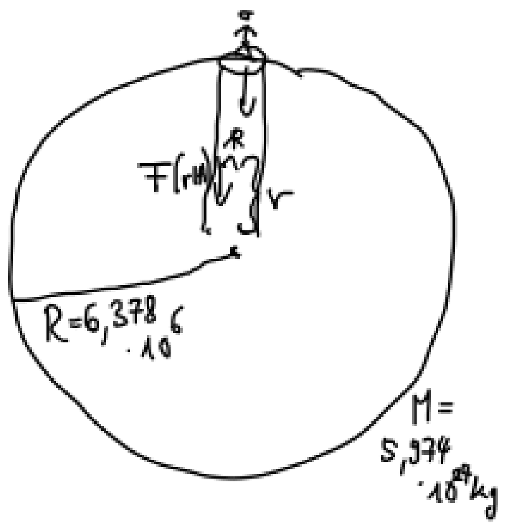
$$U(r) = \frac{1}{2} GmM \frac{r^2}{R^3}$$

(a) Stellen Sie die zugehörige Differentialgleichung für die Bewegung des Schiedsrichters, $r(t)$, auf, wobei Sie Reibungs- und Zentripetalkräfte vernachlässigen.

(b) Bestimmen Sie die Funktion des Abstandes vom Erdmittelpunkt $r(t)$ mit den Anfangsbedingungen $r(0) = R$ und $\dot{r}(0) = 0$.

(c) Wie lange dauert die Reise auf die andere Seite der Erde? Kommt der Schiedsrichter rechtzeitig zum Abpfiff wieder zurück?

(d) Vergleichen Sie an der Erdoberfläche ($r = R$) den Wert von $U(r)$ mit dem Wert des Gravitationspotentials einer Punktmasse, wie es Ihnen z.B. aus der Vorlesung bekannt ist. Skizzieren Sie den Verlauf der beiden Potentiale gegen den Radius r.



$F(r) = -U'(r)$

$F(r) = -GmM\frac{r}{R^3}$

$F = m \cdot a$

$-G \cdot \cancel{m} \cdot M \cdot \frac{r}{R^3} = \cancel{m} \cdot \ddot{r} \quad | :m$

$-\underbrace{\frac{GM}{R^3}}_{=\omega^2} r = \ddot{r}$,

Harmonische Oszillator

$\boxed{\begin{array}{l} \ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \cdot \varphi \\ \varphi(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ \quad + B \cdot \sin(\omega t) \end{array}}$

b) $r(0) = R \qquad \dot{r}(0) = 0$

$r(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}} \cdot t\right) + B \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}} \cdot t\right)$

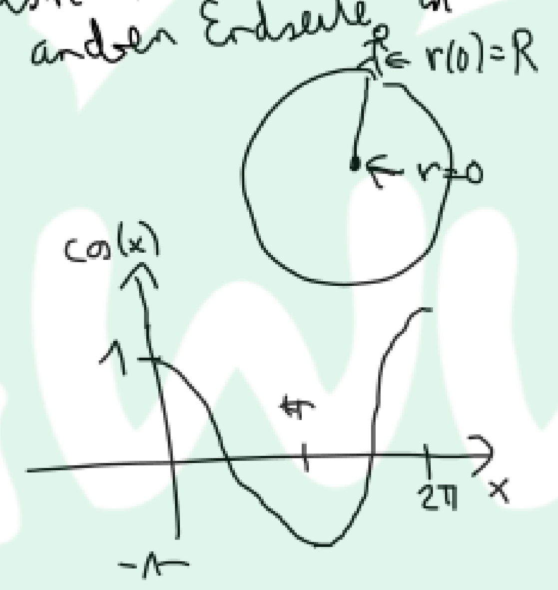
$r(0) = R \Rightarrow A = R$

$\dot{r}(t) = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \cdot A \cdot (-1) \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}} \cdot t\right) + \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \cdot B \cdot \underbrace{\cos\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}} \cdot \overset{0}{t}\right)}_{=1}$

$\dot{r}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$\Rightarrow \boxed{r(t) = R \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}} \cdot t\right)}$

c) Sei t Zeitpunkt, wo Schiedsrichter auf anderen Erdseite ist



$r(t) = -R$

$R \cdot \cos\left(\underbrace{\sqrt{\frac{G \cdot M}{R^3}}}_{=:\omega} t\right) = -R \quad | :R$

$\cos(\omega \cdot t) = -1$

$\Rightarrow \omega \cdot t = \pi$

$\Rightarrow t = \frac{\pi}{\omega} = \pi \cdot \sqrt{\frac{R^3}{G \cdot M}}$

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Direkt nach dem Anpfiff eines Fußballspiels tut sich unter dem Schiedsrichter ein Loch auf, das schnurgerade durch den Erdmittelpunkt auf die andere Seite der Erde führt. Nehmen Sie im folgenden an, dass die Erde (Masse $M = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg) eine Kugel mit dem Radius $R = 6{,}378 \cdot 10^6$ m sei und eine homogene Masseverteilung habe. Im Inneren der Erde gilt in guter Näherung das Gravitationspotential:

c) Er hat 90 min Zeit

Frage: $T \leq 90$ min ?

$r(t) = R \cdot \cos(\omega \cdot t)$

$\omega = 2\pi \cdot f$

$\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$

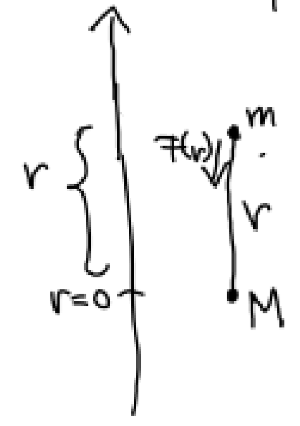
$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{G \cdot M}} =$

$= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(6{,}378 \cdot 10^6 m)^3}{G \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24} kg}} \approx 5068 s \approx 84 min < 90 min$

(d) Vergleichen Sie an der Erdoberfläche ($r = R$) den Wert von $U(r)$ mit dem Wert des Gravitationspotentials einer Punktmasse, wie es Ihnen z.B. aus der Vorlesung bekannt ist. Skizzieren Sie den Verlauf der beiden Potentiale gegen den Radius r.

$U(R) = \frac{1}{2} G \cdot \frac{m \cdot M}{R^3} R^2 = \frac{1}{2} \cdot G \frac{m \cdot M}{R}$

$U(r) = \underbrace{\frac{1}{2} G \frac{m M}{R^3}}_{C} r^2$

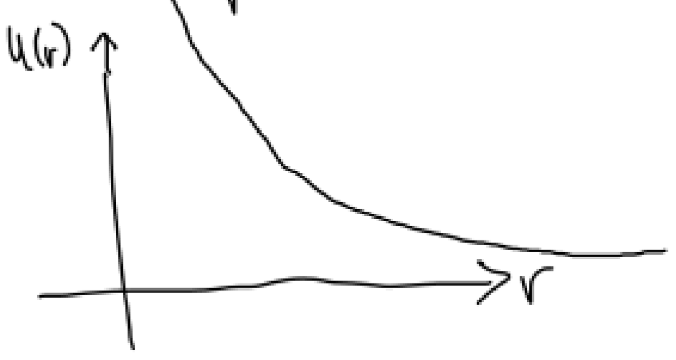


$r > 0$

$F(r) = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$

$-U'(r) = F(r)$

$U' = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \Rightarrow U(r) = -G \frac{m \cdot M}{r}$



$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) \qquad \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$