Aufgabe 15 Hammerwerfer

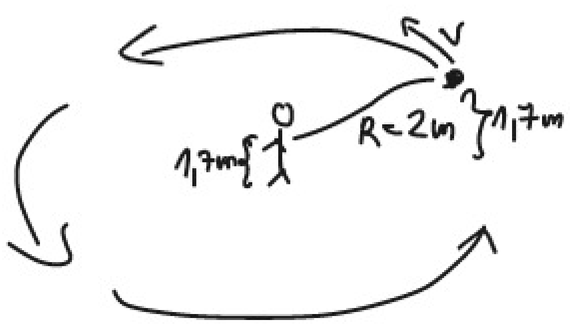
Eine Masse von $m = 7,2\,\mathrm{kg}$ werde auf einem Radius von $R = 2\,\mathrm{m}$ gleichmäßig beschleunigt und unter dem Winkel $\varphi = 45^o$ (maximale Reichweite) zur Vertikalen losgelassen. Die maximale Rotationsfrequenz von $f_{max} = 2\,\mathrm{Hz}$ wird nach $n = 3$ Umdrehungen erreicht.

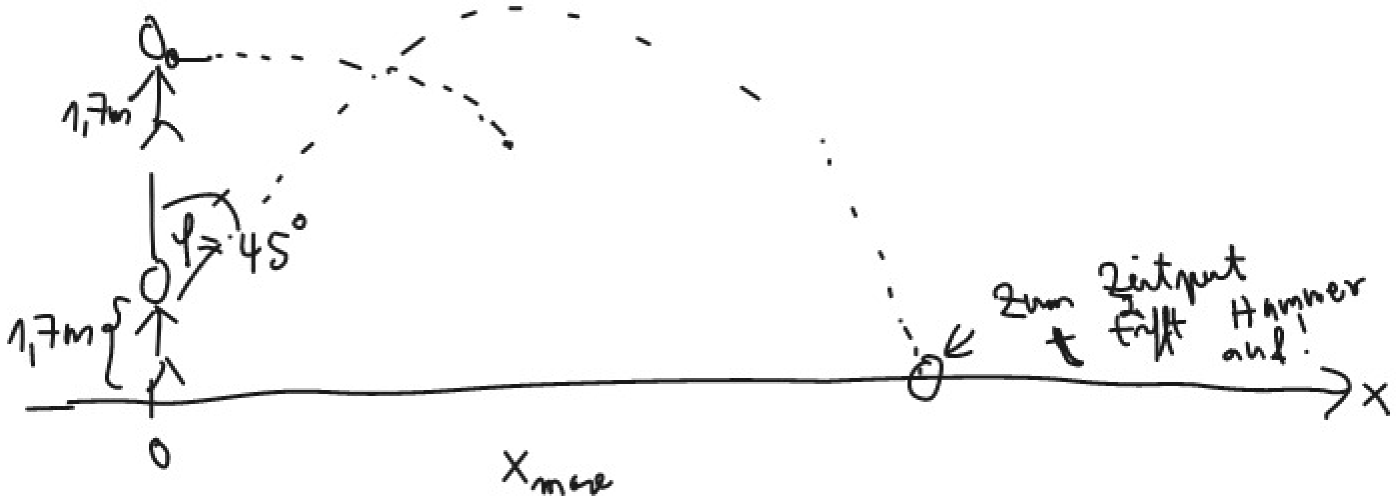
a) Bestimmen Sie die maximale Bahngeschwindigkeit v_{max} und die maximal erreichbare Wurfweite x_{max}.

b) Wie groß ist die maximal aufzuwendende Normalkraftkomponente um die Masse auf der Kreisbahn zu halten (also die Kraft um den Hammer kurz vor dem Loslassen noch zu halten)?

c) Wie groß ist die maximale Winkelbeschleunigung $\ddot{\omega}$? $\in \ddot{\varphi}$

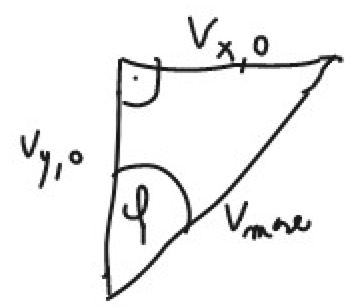
d) Bestimmen Sie die maximale Tangentialbeschleunigung a_t und die maximale Gesamtbeschleunigung a.





$$v_{max} = \frac{2\pi \cdot R}{1} = \frac{2\pi \cdot R}{\frac{1}{f}} = 2\pi \cdot R \cdot f$$
$$= 2\pi \cdot 2m \cdot 2Hz = 25,1\,\frac{m}{s}$$

x_{max}



$$\sin\varphi = \frac{GK \text{ von } \varphi}{HY} = \frac{v_{x,0}}{v_{max}}$$

sin

$$\Rightarrow v_{x,0} = \sin\varphi \cdot v_{max}$$
$$\Rightarrow v_{y,0} = \cos\varphi \cdot v_{max}$$

$x(0) = 0$

$$\underbrace{x(t) = v_{x,0} \cdot t = \sin\varphi \cdot v_{max} \cdot t}$$
$$y(t) = 1,7m + v_{y,0} \cdot t - \frac{1}{2} g t$$

$$v = \frac{x}{t}$$
$$\Rightarrow x =$$

$$a = \frac{v}{t}$$
$$v = a \cdot t$$

Beschleunigte Bewegung

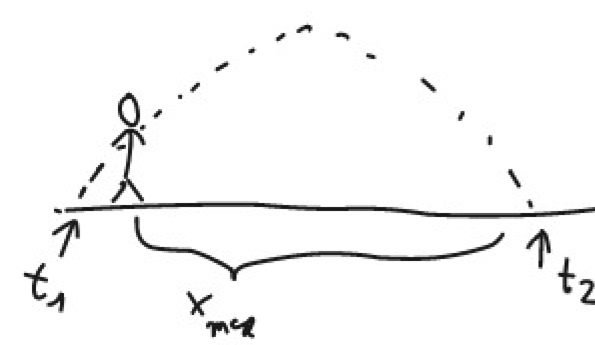
$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

$$y(t) = 0$$
$$1,7m + v_{y,0} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t_{1/2} = \frac{-v_{y,0} \pm \sqrt{v_{y,0}^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2} g) \cdot 1,7m}}{2 \cdot (-\frac{1}{2} g)}$$
$$= \frac{-\cos(45^\circ) \cdot 25,1\,\frac{m}{s} \pm \sqrt{(\cos(45^\circ) \cdot 25,1\,\frac{m}{s})^2 + 2 \cdot 9,81\,\frac{m}{s^2} \cdot 1,7m}}{-9,81\,\frac{m}{s^2}}$$

$$[t_1 \approx -0,09]$$
$$t = t_2 \approx 3,71$$

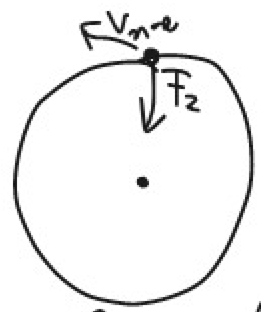


$$x_{max} = \sin(45^\circ) \cdot v_{max} \cdot t$$
$$= \sin(45^\circ) \cdot 25,1\,\frac{m}{s} \cdot 3,71\,s \approx 65,8$$

Geradlinige Bewegung	Kreisbewegung
$V = \frac{x}{t}$	$\omega = \frac{\varphi}{t}$
$x = v \cdot t$	$\varphi = \omega \cdot t$
$a = \frac{v}{t}$	$\dot{\omega} = \alpha = \frac{\omega}{t}$

$x = x_0 + v \cdot t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

b)



$$F_Z = \frac{V^2}{r} \cdot m = \frac{(25{,}1 \frac{m}{s})^2 \cdot 7{,}2\,kg}{2m} = \approx 2268\,N$$

c) $$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega_{max} - \omega_0}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f - 0}{1{,}5\,s} = 8{,}38 \frac{1}{s^2}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

2 Umdr. $\hat{=}$ 1 s

3 Umdr $\hat{=}$ x

$[\varphi] = 1$

$$\frac{x}{1s} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \cdot 1s = 1{,}5\,s$$

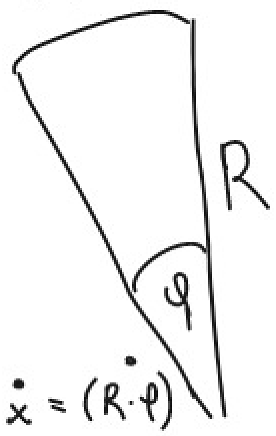
d) $$a_n = \frac{F_Z}{m} = \frac{2268\,N}{7{,}2\,kg} \approx 315{,}0 \frac{m}{s^2}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$a_t = R \cdot \alpha = 2m \cdot 8{,}38 \frac{1}{s^2} = 16{,}76 \frac{m}{s^2}$$

$$a = \sqrt{\left(16{,}76 \frac{m}{s^2}\right)^2 + \left(315 \frac{m}{s^2}\right)^2} = 315{,}4 \frac{m}{s^2}$$

$x = R \cdot \varphi$



$\dot{x} = (R \cdot \dot{\varphi})$

$V = R \cdot \omega$

$\dot{v} = R \cdot \dot{\omega}$

$a = R \cdot \alpha$

Aufgabe 21 Saturn V

$F = m \cdot a$

$= m \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{m \cdot dv}{dt} = \frac{dp}{dt}$

Allgemeiner:

$F = \frac{dp}{dt}$

a) Die Saturn V Mondrakete hatte eine Startmasse von $m_0 = 2,764 \times 10^6$ kg, eine Masse von $m_e = 0,726 \times 10^6$ kg bei Brennschluss $T = 150,7$ s und eine Ausströmgeschwindigkeit der Treibgase von $w = 2,55$ km/s (siehe "flight manual": https://history.nasa.gov/afj/ap08fj/pdf/sa503-flightmanual.pdf). Berechnen Sie die Schubkraft unter der Annahme, dass der Treibstoff gleichmässig verbrannt wird.

a)

$m_t = m_0 - m_e = (2,76 \cdot 10^6 - 0,726 \cdot 10^6)\,kg$

$\approx 2,034 \cdot 10^6\,kg$

$F_s = \frac{dp}{dt} = \frac{m_t \cdot w}{T} = \frac{2,034 \cdot 10^6\,kg \cdot 2550\,\frac{m}{s}}{150,7\,s}$

$\approx 34,42 \cdot 10^6\,N$

Masse m

Pferd 1 $t = 5s$ $h = 100\,m$

Pferd 2 $t = 2s$ $h = 40\,m$

Masse m

$P_1 = \frac{W_1}{t_1} = \frac{m \cdot g \cdot \overset{100\,m}{h_1}}{5s} = m \cdot g \cdot 20$

$P_2 = \frac{W_2}{t_2} = \frac{m \cdot g \cdot \overset{40\,m}{h_2}}{2s} = m \cdot g \cdot 20$

b)

Leistung gleich

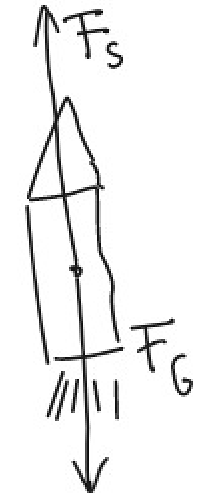
b) Der Treibstoff RP-1 wird im Massenverhältnis 2.77 (LOX/RP-1) mit flüssigen Sauerstoff (LOX) verbrannt und hat eine Energiedichte von 43 MJ/kg. Berechnen Sie thermische Leistung und vergleichen Sie diese mit der geschätzten Leistung aller Kraftwerke der USA.

$P = \frac{E}{t} = \frac{43\,MJ/kg \cdot m_t}{T} =$

$= \frac{43 \cdot 10^6\,J/kg \cdot 2,034 \cdot 10^6\,kg}{150,7\,s} \approx 580,4 \cdot 10^3\,W$

$= 580,4\,kW$

$\frac{\ldots}{150{,}7\,s}$ $= 580{,}4\,kW$



Masse von Rakete + Treibstoff

$m = m(t)$

c) Sie drosseln die Treibstoffzufuhr bis die Rakete über dem Boden schwebt ohne sich zu bewegen. Wie lange kann die Rakete dort bleiben?

$$F_S = \frac{dp}{dt} = -\frac{dm(t)}{dt} \cdot w =$$

$$m(0) = m_0$$

$$F_S = F_G$$

$$-\frac{dm(t)}{dt} \cdot w = m(t) \cdot g$$

$$-\dot{m}(t) \cdot w = m(t)\, g$$

$$\dot{m}(t) = -\frac{g}{w} \cdot m(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x) &= A \cdot f(x) \\ f(x) &= C \cdot e^{A \cdot x}, \; C \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

$$f'(x) = \left(C \cdot e^{Ax}\right)' = C \cdot A \cdot e^{Ax} = A \cdot \underbrace{C \cdot e^{Ax}}_{= f(x)} = A \cdot f(x)$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\left(e^{5x}\right)' = e^{5x} \cdot 5$$

$$\left(e^{10x}\right)' = e^{10x} \cdot 10$$

$$\Rightarrow \quad m(t) = C \cdot e^{-\frac{g}{w} \cdot t}$$

$$m(0) = m_0$$

$$C \cdot e^{-\frac{g}{w} \cdot 0} = C \cdot e^0 = C \quad \Rightarrow C = m_0$$

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-\frac{g}{w} \cdot t}$$

$t =$ Zeitpunkt, wo Treibstoff alle

$$m(t) \stackrel{!}{=} m_e$$

$$m_0 \cdot e^{-\frac{g}{w} \cdot t} = m_e \quad \Big| : m_0$$

$$e^{-\frac{g}{w} \cdot t} = \frac{m_e}{m_0} \quad \Big| \ln(\;)$$

$$-\frac{g}{w} \cdot t = \ln\left(\frac{m_e}{m_0}\right) \quad \Big| : \left(-\frac{g}{w}\right)$$

$$t = \ln\left(\frac{m_e}{m_0}\right) \cdot \frac{w}{g} \cdot (-1) =$$

$$= \ln\left(\frac{0{,}726 \cdot 10^6\,kg}{2{,}764 \cdot 10^6\,kg}\right) \cdot \frac{2550\,\frac{m}{s}}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}} \cdot (-1) = 347{,}5\,s \approx 5{,}8\,min$$

$$x^2 = 5 \quad \big| \sqrt{\;}$$

$$x = \sqrt{5}$$

$$2^x = 5 \quad \big| \ln_2(\;)$$

$$x = \ln_2(5)$$

d) Berechnen Sie unter den Angaben in a) die Geschwindigkeit und die Beschleunigung vom Zeitpunkt der Zündung bis zum Brennschluss unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes. Wann ist die Beschleunigung maximal?

$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m_t}{T}$

Hauptsatz

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s)\, ds$

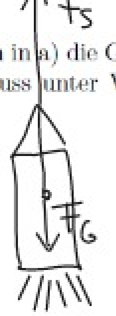
Dann gilt $F' = f$ und $F(x_0) = y_0 + \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} f(s)\, ds}_{=0} = y_0$

$\dot{x} = v$

$\dot{v} = a$

$\int_5^5 x^3\, dx = 0$

$v(0) = 0$



$F = m \cdot a$

$F_S - F_G = m(t) \cdot a$

$F_S - m(t) \cdot g = m(t) \cdot a$

$m(t) = m_0 - \overset{\shortparallel}{S} \cdot t$

$= m_0 - \frac{m_t}{T} \cdot t$

$\Rightarrow a(t) = \frac{F_S - m(t) \cdot g}{m(t)}$

$\Rightarrow a(0) = \frac{F_S - m_0 \cdot g}{m_0} = \frac{34{,}42 \cdot 10^6\, N - 2{,}764 \cdot 10^6\, kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}}{2{,}764 \cdot 10^6\, kg}$

$\approx 3{,}0 \frac{m}{s^2}$

$a(T) = \frac{F_S - m_e \cdot g}{m_e} = \frac{34{,}42 \cdot 10^6\, N - 0{,}726 \cdot 10^6\, kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}}{0{,}726 \cdot 10^6\, kg}$

$\approx 37{,}4 \frac{m}{s^2}$

$$v(T) = v_0 + \int_0^T \frac{F_S - m(t) \cdot g}{m(t)}\, dt =$$

$$= v_0 + \int_0^T \frac{F_S - \left(m_0 - \frac{m_t}{T} \cdot t\right) \cdot g}{m_0 - \frac{m_t}{T} \cdot t}\, dt$$

$\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{a}{b} + 1$

$$= 0 + \int_0^T \frac{F_S}{m_0 - \frac{m_t}{T} \cdot t} - g\, dt = \left[F_S \cdot (-1) \cdot \frac{T}{m_t} \ln\left(m_0 - \frac{m_t}{T} t\right) - g \cdot t\right]_0^T$$

$$= F_S \cdot (-1) \cdot \frac{T}{m_t} \cdot \ln(\underbrace{m_0 - m_t}_{m_e}) - g \cdot T + F_S \cdot \frac{T}{m_t} \cdot \ln(m_0) + \underbrace{g \cdot 0}_{=0}$$

$$= F_S \cdot \frac{T}{m_t} \cdot \left(\ln(m_0) - \ln(m_0 - m_t)\right) - g T$$

$$= F_S \cdot \frac{T}{m_t} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m_t}\right) - g \cdot T$$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$(\ln(\sin(x)))' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$

$$\left((-1) \frac{T}{m_t} \cdot \ln\left(m_0 - \frac{m_t}{T} \cdot t\right)\right)' = (-1) \cdot \cancel{\frac{T}{m_t}} \frac{1}{m_0 - \frac{m_t}{T} \cdot t} \cdot (-1) \cdot \cancel{\frac{m_t}{T}} = \frac{1}{m_0 - \frac{m_t}{T} \cdot t}$$

miro