(a) (2 Punkte) Lagrangesches Basispolynom $L_0 = \frac{X - x_1}{x_0 - x_1}$

(b) (2 Punkte) Lagrangesches Basispolynom $L_1 = \frac{X - x_0}{x_1 - x_0}$

(c) (2 Punkte) Newtonsches Basispolynom $\omega_0 = 1$

(d) (2 Punkte) Newtonsches Basispolynom $\omega_1 = (X - x_0)$

(e) (2 Punkte) Berechnen Sie die Zeilensummennorm: $\left\|\begin{pmatrix}15 & -5\\ 1 & 17\end{pmatrix}\right\|_\infty$.

(f) (2 Punkte) Berechnen Sie die Spaltensummennorm: $\left\|\begin{pmatrix}15 & -5\\ 1 & 17\end{pmatrix}\right\|_1$

(i) Zeilensummennorm

$$\|A\|_\infty := \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| : k \in \{1,\dots,m\}\right\}$$

e) $\left\|\begin{pmatrix}15 & -5\\ 1 & 17\end{pmatrix}\right\|_\infty = \max\{|15|+|-5|, |1|+|17|\} = \max\{20, 18\} = 20$

(ii) Spaltensummennorm

$$\|A\|_1 := \max\left\{\sum_{j=1}^{m} |a_{jk}| : k \in \{1,\dots,n\}\right\}$$

$\left\|\begin{pmatrix}15 & -5\\ 1 & 17\end{pmatrix}\right\|_1 = \max\{16, 22\} = 22$

(g) (2 Punkte) Berechnen Sie den Spektralradius der komplexen Matrix:

$$r\underbrace{\begin{pmatrix}2i & -5\\ 0 & -3\end{pmatrix}}_{A} = \|A\|_2 = \sup\left\{\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \,\middle|\, x \neq 0\right\}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Eigenwert

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det\left(\begin{pmatrix}2i & -5\\ 0 & -3\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix}2i-\lambda & -5\\ 0 & -3-\lambda\end{pmatrix} = (2i - \lambda)\cdot(-3-\lambda) \overset{!}{=} 0$$

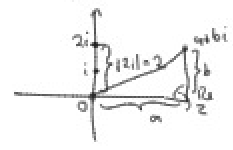
$\Rightarrow \lambda_1 = 2i$ $\quad \lambda_2 = (-3)$ sind EW

$r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ EW von } A\}$
$= \max\{|2i|, |-3|\}$
$= \max\{2, 3\} = 3$

$\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = ad - bc$

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} + 10\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21 & 32\\ 43 & \end{pmatrix}$

Im


$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

Geben Sie für die komplexe Matrix

$$A := \begin{pmatrix}5 & 1+i & 1-i\\ 2 & 3 & e^{5i}\\ -\frac{1}{2} & 0 & 1\end{pmatrix}$$

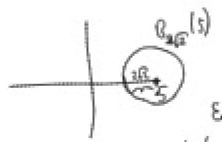
die zeilenweisen Gerschgorinkreise an:

$G_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq |-\tfrac{1}{2}| + |0|\}$
$= B_{\frac{1}{2}}(1)$

$G_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 5| \leq |1+i| + |1-i|\}$
$= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 5| \leq \underbrace{\sqrt{2} + \sqrt{2}}_{=2\sqrt{2}}\}$
$= B_{2\sqrt{2}}(5)$

$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$
$|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
$|1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq |-2| + |e^{5i}|\}$
$= \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq 2 + 1\}$
$= B_3(3)$



Eulersche Formel

$\forall x \in \mathbb{R}: |e^{ix}| \overset{\text{E}}{=} |\cos x + i \sin(x)|$
$= \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = \sqrt{1} = 1$

$B_3(3) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| < 3\}$

$x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ alle verschiedenen

Seien $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ verschieden. Geben Sie dazu die

(a) (2 Punkte) Lagrangesches Basispolynom L_0

(b) (2 Punkte) Lagrangesches Basispolynom L_1

(c) (2 Punkte) Newtonsches Basispolynom ω_0 =

(d) (2 Punkte) Newtonsches Basispolynom ω_1 =

$$\forall_{j=0,\dots,n} \quad \underbrace{L_j := \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{X - x_i}{x_j - x_i} = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{X^1 - x_i X^0}{x_j - x_i}}_{\text{Lagrangesche Basispolynome}} \quad (3.10)$$

$$L_0 = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq 0}}^{1} \frac{X - x_i}{x_0 - x_i} = \frac{X - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1 = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{1} \frac{X - x_i}{x_1 - x_i} = \frac{X - x_0}{x_1 - x_0}$$

wobei

$$\forall_{j=0,1,\dots,n} \quad \omega_j := \prod_{i=0}^{j-1} (X - x_i) \in K[X]_j \subseteq K[X]_n.$$

ω_j: Newtonsche Basispol.

$$\omega_0 = \prod_{i=0}^{0-1} (X - x_i) = 1$$

$$\omega_1 = \prod_{i=0}^{0} (X - x_i) = X - x_0$$

Th. 3.13: Sei alles wie in Def. 3.12.

(a) Das Int.pol. erfüllt folgende Rekursion:
Für $r = 0$:

$$P[x_0,\dots,x_n] = P[\tilde{x}_0,\dots,\tilde{x}_0] = \sum_{j=0}^{n} \frac{(X - \tilde{x}_0)^j}{j!} y_0^{(j)}. \quad (3.16a)$$

Für $r > 0$ und $\tilde{x}_k \neq \tilde{x}_l$:

$$\underbrace{P[x_0,\dots,x_n]}_{=p} = \frac{(X - \tilde{x}_l)\overbrace{P[x_0,\dots,\hat{x}_l,\dots,x_n]}^{\text{weggelassen}} - (X - \tilde{x}_k)P[x_0,\dots,\hat{x}_k,\dots,x_n]}{\tilde{x}_k - \tilde{x}_l} \quad (3.16b)$$

Aufgabe 1. [10 Punkte]

Berechnen Sie $p(3)$, wobei $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ das Interpolationspolynom zu den Daten

$$\overset{y_0}{p(1) = 1}, \quad \overset{y_0^{(1)}}{p'(1) = 4}, \quad \overset{y_1}{p(2) = 3}, \quad \overset{y_1^{(1)}}{p'(2) = 1}$$

ist. Dabei soll $p(3)$ mit einem Neville-Schema berechnet werden, ohne zunächst die Koeffizienten von p zu bestimmen.

$\frac{(X-1)^0}{0!}\cdot 1 \,\Big|_{X=3} = 1$

$= P[1](3)$

$P[2](3) = \frac{(X-2)^0}{0!}\cdot 3 \,\Big|_{X=3} = 3$

$\frac{(X-1)^0}{0!}\cdot 1 + \frac{(X-1)^1}{1!}\cdot 4 \,\Big|_{X=3} = 1 + 8 = 9$

$9 = P[1,1](3)$

$P[2,2] = \frac{(3-2)^0}{0!}\cdot 3 + \frac{(3-2)^1}{1!}\cdot 1 = 3 + 1 = 4$

$\frac{(3-1)\cdot 3 - (3-2)\cdot 1}{2-1} = P[1,2](3)$

$= \frac{6-1}{1} = 5$

$P[1,2](3) = 5$

$\frac{(3-1)\cdot 5 - (3-2)\cdot 9}{2-1} = P[1,1,2](3)$

$= \frac{10-9}{2-1} = 1$

$P[1,2,2](3) = \frac{(3-1)\cdot 4 - (3-2)\cdot 5}{2-1}$

$= 8 - 5 = 3$

$P[1,1,2,2](3)$

$= \frac{(3-1)\cdot 3 - (3-2)\cdot 1}{2-1}$

$= 6 - 1 = 5$

$$P[1,1](3) = y_0 + (3-1)\,y_0^{(1)} = 1 + 2\cdot 4 = 9,$$
$$P[2,2](3) = y_1 + (3-2)\,y_1^{(1)} = 3 + 1 = 4.$$

Damit ergibt sich das Neville-Schema

$$\begin{array}{lllll}
P_{00} = y_0 = 1 & & & & \\
 & \searrow & & & \\
P_{10} = y_0 = 1 & \rightarrow & P_{11} = P[1,1](3) = 9 & & \\
 & \searrow & & \searrow & \\
P_{20} = y_1 = 3 & \rightarrow & P_{21} = P[1,2](3) = \frac{(3-1)\cdot 3 - (3-2)\cdot 1}{2-1} = 5 & \rightarrow & P_{22} = P[1,1,2](3) = \frac{2\cdot 5 - 9}{2-1} = 1 \\
 & \searrow & & \searrow & \\
P_{30} = y_1 = 3 & \rightarrow & P_{31} = P[2,2](3) = 4 & \rightarrow & P_{32} = P[1,2,2](3) = \frac{2\cdot 4 - 5}{2-1} = 3
\end{array}$$

und fortgesetzt:

$$\begin{array}{llll}
\dots & P_{22} = 1 & & \\
 & & \searrow & \\
\dots & P_{32} = 3 & \rightarrow & P_{33} = P[1,1,2,2](3) = \frac{2\cdot 3 - 1}{2-1} = 5 = p(3)
\end{array}$$