Aufgabe 5. 20 Punkte

Geben Sie Ihre Rechnungen und Argumentationen mit Zwischenschritten an, vereinfachen Sie so möglich.

(a) (10 Punkte) Berechnen Sie die Choleskyzerlegung der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 22 \end{pmatrix}.$$

Satz: Falls A symmetrisch und positiv definit, so hat A eine Cholesky-Zerlegung, d.h. $\exists$ untere Δ-Matrix L sodass $A = L \cdot L^T$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 22 \end{pmatrix}$$

$l_{11}^2 = 9 \Rightarrow l_{11} = 3$

$l_{21} \cdot l_{11} = -3 \Rightarrow l_{21} = \frac{-3}{l_{11}} = \frac{-3}{3} = -1$

$l_{31} \cdot l_{11} = 6 \Rightarrow l_{31} = \frac{6}{l_{11}} = \frac{6}{3} = 2$

$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 2 \Rightarrow l_{22} = \sqrt{2 - l_{21}^2} = \sqrt{2-(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

$l_{31} \cdot l_{21} + l_{32} \cdot l_{22} = 1$

$-2 + l_{32} = 1 \Rightarrow l_{32} = 2+1 = 3$

$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 22$

$4 + 9 + l_{33}^2 = 22$

$l_{33}^2 = 9 \Rightarrow l_{33} = 3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$LL^* = LL^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Th. 5.7: Sei $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ herm. pos. def.
Dann ex. genau eine unt. Δ-Mat. L so, dass

$$A = LL^*, \quad \underset{j=1,\dots,n}{\forall} \; l_{jj} > 0$$

(Zerl. in (5.10) heißt Cholesky-Zerlegung von A).

(a) (10 Punkte) Berechnen Sie $p(3)$, wobei $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ die Interpolationspolynomfunktion zu den Daten

$$p(1) = 1, \quad p'(1) = -1, \quad p(2) = 3, \quad p'(2) = -3$$

sei. Dabei soll $p(3)$ mit einem Neville-Schema berechnet werden, ohne zuvor die Koeffizienten von p zu bestimmen.

) Das Int.pol. erfüllt folgende Rekursion:
Für $r = 0$:

$$P[x_0, \dots, x_n] = P[x_0, \dots, x_0] = \sum_{j=0}^{n} \frac{(X - x_0)^j}{j!} y_0^{(j)}. \qquad (3.18a)$$

Für $r > 0$ und $x_k \neq x_l$:

weggelassen

$$P[x_0, \dots, x_n] = \frac{(X - x_l) P[x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n] - (X - x_k) P[x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_n]}{x_k - x_l} \qquad (3.18b)$$

$\frac{(X-1)^0}{0!} \cdot 1 + \frac{(X-1)^1}{1!} \cdot (-1) = 1 - 2 = -1$

$\frac{(X-2)^0}{0!} \cdot 3 + \frac{(X-2)^1}{1!} \cdot (-3) = 0$

$\frac{(X-1)^0}{0!} \cdot 1 = 1$

$\frac{(X-2)^0}{0!} \cdot 3 = 3$

$P[1]$, $P[2]$, $P[1,1]$, $P[2,2]$, $P[1,2] = 5$

$P[1,2] = \frac{(X-1) \cdot P[2] - (X-2) \cdot P[1]}{2-1} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 1}{1} = 5$

$\frac{2 \cdot 5 - (-1)}{1} = 11 = \frac{(X-1) \cdot P[1,2] - (X-2) \cdot P[1,1]}{2-1} = P[1,1,2]$

$P[1,2,2] = \frac{(X-1) \cdot P[2,2] - (X-2) \cdot P[1,2]}{2-1} = \frac{-5}{1} = -5$

$P[1,1,2,2] = \frac{(X-1) \cdot P[1,2,2] - (X-2) \cdot P[1,1,2]}{2-1} = \frac{2 \cdot (-5) - 11}{1}$

$= -10 - 11 = -21$ ✓

$P[3]$, $P[2]$, $P[1]$, $P[3]$, $P[2,3]$, $P[1,3]$

$P[1,2,3] = \frac{(X-1) \cdot P[2,3] - (X-2) P[1,3]}{2-1}$

$P_{00} = y_0 = 1$

$P_{10} = y_0 = 1 \rightarrow P_{11} = P[1,1](3) = -1$

$P_{20} = y_1 = 3 \rightarrow P_{21} = P[1,2](3) = \frac{(3-1) \cdot 3 - (3-2) \cdot 1}{2-1} = 5 \rightarrow P_{22} = P[1,1,2](3) = \frac{2 \cdot 5 - 1 \cdot (-1)}{2-1} = 11$ ✓

$P_{30} = y_1 = 3 \rightarrow P_{31} = P[2,2](3) = 0 \rightarrow P_{32} = P[1,2,2](3) = \frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 5}{2-1} = -5$ ✓

und fortgesetzt:

$\dots \quad P_{22} = 11$

$\dots \quad P_{32} = -5 \rightarrow P_{33} = P[1,1,2,2](3) = \frac{2 \cdot (-5) - 1 \cdot 11}{2-1} = -21.$

(b) (10 Punkte) Auf der Menge $K := \{0, 1, 2\}$ seien Verknüpfungen $+, \cdot$ durch die Verknüpfungstafeln

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

definiert. Dann ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper (das sollen Sie hier nicht zeigen). Es sei $f := a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in K[X]_3$ das Interpolationspolynom zu den Daten

$$f(1) = 0, \quad f(2) = 2, \quad f'(2) = 0, \quad f''(2) = 2 = y_1^{(2)}$$

Bestimmen Sie $a_0, a_1, a_2, a_3 \in K$ mit Hilfe der dividierten Differenzen und der Newtonschen Interpolationsformel.

$2 + 2 = 4 = 1$

$2 + 1 = 0$

$2 \cdot 2 = 4 = 1$

Th. 3.17: In Situation von Def. 3.12/3.16 gilt Newtons Interpolationsformel

$$P[x_0, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^{n} [x_0, \dots, x_j] \omega_j \in K[X]_n, \qquad (3.20a)$$

wobei

$$\underset{j=0,1,\dots,n}{\forall} \quad \omega_j := \prod_{i=0}^{j-1} (X - x_i) \in K[X]_j \subseteq K[X]_n. \qquad (3.20b)$$

ω_j: Newtonsche Basispol.
Nach (3.20a) gilt die Rekursion

$$P[x_0] = y_0^{(0)}, \qquad (3.21a)$$

$$P[x_0, \dots, x_j] = P[x_0, \dots, x_{j-1}] + [x_0, \dots, x_j] \omega_j \quad \text{für } 1 \le j \le n. \qquad (3.21b)$$

$P[1,2,2,2] \overset{3.21b)}{=}$

$= P[1,2,2] + [1,2,2,2] \prod_{i=0}^{3-1} (X - x_i)$

$= P[1,2] + [1,2,2] \cdot (X-1)(X-2) + [1,2,2,2](X-1) \cdot (X-2)^2$

$= P[1] + [1,2] \cdot (X-1) + \underbrace{[1,2,2]}_{=1}(X-1)(X-2) + \underbrace{[1,2,2,2]}_{=0}(X-1)(X-2)^2$, $P[1] = 0$, $[1,2] = 2$

Th. 3.18: In Situation von Def. 3.16 gilt:

(a) Rekursion: Für $r = 0$:

$$[x_0, \dots, x_n] = [x_0, \dots, x_0] = \frac{y_0^{(n)}}{n!}. \qquad (3.23a)$$

Für $r > 0$ und $x_k \neq x_l$:

weglassen

$$[x_0, \dots, x_n] = \frac{[x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_n] - [x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n]}{x_k - x_l}. \qquad (3.23b)$$

$= 2 \cdot (X-1) + (X-1) \cdot (X-2)$

$= \cancel{2X} - \cancel{2} + X^2 - \cancel{2X} - X + \cancel{2}$

$= X^2 - X = X^2 + 2X$

$-1 = 2$

$[1] = \frac{0}{0!} = 0$, $[2] = \frac{2}{0!} = 2$

$2 = \frac{[2] - [1]}{2-1} = [1,2]$

$[2,2] = \frac{0}{1!} = 0$

$[2,2,2] = \frac{2}{2!} = 1$

$\frac{0-2}{1} = -2 = 1$; $\frac{[2,2] - [1,2]}{2-1} = [1,2,2]$

$[1,2,2,2] = \frac{[2,2,2] - [1,2,2]}{2-1} = \frac{1-1}{1} = 0$

Zu (b): Wir bestimmen $f = P[1,2,2,2]$ mit Hilfe der Newtonschen Interpolationsformel (3.20a):

$$P[1,2,2,2] = [1] + [1,2](X-1) + [1,2,2](X-1)(X-2) + [1,2,2,2](X-1)(X-2)^2. \qquad (1)$$

(2 Punkte)

Die Koeffizienten ergeben sich nach Bem. 3.19 aus dem Neville-Schema (4 Punkte)

$[1] = y_1 = 0$

$[2] = y_2 = 2 \rightarrow [1,2] = \frac{2-0}{2-1} = 2$

$[2] = y_2 = 2 \rightarrow [2,2] = y_2' = 0 \rightarrow [1,2,2] = \frac{0-2}{2-1} = -2 = 1$

$[2] = y_2 = 2 \rightarrow [2,2] = y_2' = 0 \rightarrow [2,2,2] = \frac{y_2''}{2!} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow [1,2,2,2] = \frac{1-1}{2-1} = 0.$

Eingesetzt in (1) ergibt sich

$$P[1,1,2,2] = 0 + 2(X-1) + 1(X-1)(X-2) + 0(X-1)(X-2)^2$$
$$= 2X - 2 + X^2 - 3X + 2 \overset{3=0,\,-2=1}{=} 2X + X^2 \quad \text{(3 Punkte)}.$$

Also gilt

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0 \quad \text{(1 Punkt)}.$$