21. (2 + 3 Punkte) Es bezeichne $B_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ die Bernoulli-Polynome.

(a) Berechnen Sie die ersten sieben Bernoulli-Zahlen, also B_n für $0 \leq n \leq 6$.

(b) Zeigen Sie die Reflexion-Formel $B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$ für $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}_0$

a)

Die ersten Bernoulli-Polynome sind

- $B_0(x) = 1,$
- $B_1(x) = x - \frac{1}{2},$
- $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$
- $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$
- $B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.$

Definition 3.12. Die Konstanten $B_n(0) := B_n$ heißen Bernoulli-Zahlen.

$$B_0 = B_0(0) = 1$$
$$B_1 = B_1(0) = -\frac{1}{2}$$
$$B_2 = B_2(0) = \frac{1}{6}$$
$$B_3 = B_3(0) = 0$$
$$B_4 = B_4(0) = -\frac{1}{30}$$

Definition 3.10. Das durch die folgende Rekursionsvorschrift festgelegte System von Polynomen B_r heißt das System der *Bernoulli-Polynome*.

(i) $B_0(x) = 1,$

(ii) $B'_{r+1}(x) = (r+1)B_r(x)$, $r = 0, 1, 2, \ldots,$

(iii) $\int_0^1 B_r(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

$$B_5'(x) = B'_{4+1}(x) \overset{ii)}{=} 5 \cdot B_4(x) = 5 \cdot \left(x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}\right)$$

$$B_5(x) \in \int 5 \cdot B_4(x)\,dx = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30} \cdot x\right) + C$$

iii) $\Rightarrow$ $\int_0^1 B_5(x) \overset{!}{=} 0$

$$\left[5 \cdot \left(\frac{1}{30} \cdot x^6 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{60}x^2\right) + C \cdot x\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{5}{12} - \frac{1}{12} + C \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{2}{12} - \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + C = 0$$

$$C = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\Rightarrow B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$$

$$B_5 = B_5(0) = 0$$

miro

21. **(2 + 3 Punkte)** Es bezeichne $B_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ die Bernoulli-Polynome.

(a) Berechnen Sie die ersten sieben Bernoulli-Zahlen, also B_n für $0 \le n \le 6$.

(b) Zeigen Sie die Reflexion-Formel $B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$ für $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}_0$

$$\text{Zu zeigen: } \forall n \in \mathbb{N}_0 \ \underbrace{\forall x \in [0,1] : \underbrace{B_n(x)}_{LS} = \underbrace{(-1)^n \cdot B_n(1-x)}_{RS}}_{A(n)}$$

Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang $n=0$ Sei $x \in [0,1]$

$$\left.\begin{aligned} LS &= B_0(x) = 1 \\ RS &= \underbrace{(-1)^0}_{=1} \cdot B_0(1-x) = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow LS = RS \ \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $A(n)$.

Induktionsschritt: Zu zeigen: $A(n+1)$, d.h. $\forall x \in [0,1]$:

$$\underbrace{B_{n+1}(x)}_{LS} = \underbrace{(-1)^{n+1} \cdot B_{n+1}(1-x)}_{RS}$$

$$B_{n+1}'(x) \overset{\text{Def. 3.10}}{=} (n+1) \cdot B_n(x) \overset{IV}{=} (n+1) \cdot (-1)^n \cdot B_n(1-x)$$

$\Rightarrow$ Wir finden $C \in \mathbb{R}$ (sodass iii) erfüllt) sodass $LS = B_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x (n+1) \cdot B_n(t)\, dt + C$

$$= \int_0^x (n+1) \cdot (-1)^n \cdot B_n(1-t)\, dt + C$$

Hauptsatz

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. $x_0 \in \mathbb{R}$

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$

Dann ist $F' = f$

Definition 3.10. Das durch die folgende Rekursionsvorschrift festgelegte System von Polynomen B_r heißt das System der *Bernoulli-Polynome*.

(i) $B_0(x) = 1$,

(ii) $B_{r+1}'(x) = (r+1)B_r(x)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$,

(iii) $\int_0^1 B_r(x)\, dx = 0$.

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\, ds$$

$$RS = (-1)^{n+1} \cdot B_{n+1}(1-x) =$$

$$= (-1)^{n+1} \int_0^{1-x} (n+1) \cdot (-1)^n \cdot B_n(\underbrace{1-t}_{g(t)})\, dt + C$$

$$= (-1)^{n+1} \int_1^x (n+1) \cdot (-1)^n \cdot B_n(t) \cdot (-1)\, dt + C$$

$$= \underbrace{(-1)^{2n+2}}_{=1} \cdot (n+1) \cdot \int_1^x B_n(t)\, dt + C$$

$$= (n+1) \cdot \left(0 + \int_1^x B_n(t)\, dt\right) + C$$

$$\overset{iii)}{=} (n+1) \cdot \left(\int_0^1 B_n(t)\, dt + \int_1^x B_n(t)\, dt\right) + C$$

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$$

$$= (n+1) \cdot \int_0^x B_n(t)\, dt + C$$

$$= B_{n+1}(x) = LS \ \checkmark$$

miro

22. (3 + 4 Punkte, Faulhaber-Formeln) Zeigen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung bewiesenen Eulerschen Summenformel die Identitäten

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$f(k) = k^3$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{0 \le k < n+1} f(k) =$$

$$\sum_{a \leqslant k < b} f(k) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + R_m, \qquad (9.67)$$

$$\text{where } R_m = (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\,dx, \qquad \begin{array}{l}\text{integers } a \leqslant b;\\ \text{integer } m \geqslant 1.\end{array} \qquad (9.68)$$

$$= \int_0^{n+1} x^3\,dx + \sum_{k=1}^{4} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_0^{n+1} + 0 =$$

$B_0 = B_0(0) = 1$
$B_1 = B_1(0) = -\frac{1}{2}$
$B_2 = B_2(0) = \frac{1}{6}$
$B_3 = B_3(0) = 0$
$B_4 = B_4(0) = -\frac{1}{30}$

$$= \left[\frac{1}{4} x^4\right]_0^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^3\Big|_0^{n+1} + \frac{1}{12} \cdot 3x^2\Big|_0^{n+1} + 0 - \underbrace{\frac{1}{30 \cdot 24} \cdot 6\Big|_0^{n+1}}_{=0} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (n+1)^4 - \frac{1}{2} \cdot (n+1)^3 + \frac{1}{4} \cdot (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (n+1)^2 \cdot \left[(n+1)^2 - 2(n+1) + 1\right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (n+1)^2 \cdot \left[(n+1-1)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 = \left(\frac{(n+1) \cdot n}{2}\right)^2 \quad \blacksquare$$

miro

23. **(5 Punkte)** Mit der Eulerschen Summenformel ist es ebenfalls möglich die Ihnen wahrscheinlich schon aus der Analysis I bekannte Stirlingsche Formel $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ für $n \to \infty$ zu verschärfen[1], d.h. nicht bloß die asymptotische Äquivalenz festzustellen sondern auch den Approximationsfehler von beliebig hoher Ordnung genau zu berechnen.

Zeigen Sie also, mit der Eulerschen Summenformel aus der Vorlesung, die Identität

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \quad \text{für } n \to \infty.$$

$$\sum_{a \leqslant k < b} f(k) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + R_m, \qquad (9.67)$$

$$\text{where } R_m = (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\,dx, \quad \text{integers } a \leqslant b; \text{ integer } m \geqslant 1. \qquad (9.68)$$

$$\ln(n!) = \ln(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n) =$$

$$\boxed{\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)} \rightarrow = \ln(1) + \ln(2) + \ldots + \ln(n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{1 \le k < n+1} f(k) =$$

$f(k) = \ln(k)$

$\{x\} =$ nicht ganzzahlig Anteil von x

$\{5,1\} = 0,1$

$\{6,91\} = 0,91$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\ln''(x) = (-1) \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\ln'''(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^3}$$

$$\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \, \frac{1}{x^n}$$