23. (5 Punkte) Mit der Eulerschen Summenformel ist es ebenfalls möglich die Ihnen wahrscheinlich schon aus der Analysis I bekannte Stirlingsche Formel $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ für $n \to \infty$ zu verschärfen[1], d.h. nicht bloß die asymptotische Äquivalenz festzustellen sondern auch den Approximationsfehler von beliebig hoher Ordnung genau zu berechnen.

Zeigen Sie also, mit der Eulerschen Summenformel aus der Vorlesung, die Identität

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \quad \text{für } n \to \infty.$$

$$\int f \cdot g' \, dx = f \cdot g - \int f' g$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int \ln(x) \cdot 1 \, dx &= \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx \\ &= \ln(x) \cdot x - \int 1 \, dx \\ &= \ln(x) \cdot x - x\end{aligned}}$$

Euler'sche Summen

$$\sum_{a \leqslant k < b} f(k) = \int_a^b f(x)\, dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + R_m, \qquad (9.67)$$

$$\text{where } R_m = (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\, dx, \quad \text{integers } a \leqslant b; \text{ integer } m \geqslant 1. \qquad (9.68)$$

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{1 \le k < n+1} f(k) =, \qquad f(k) = \ln(k)$$

$$= \int_1^{n+1} \ln(x)\, dx + \sum_{k=1}^{4} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_1^{n+1} + R_4$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \quad \ln''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad \ln^{(3)}(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^3}, \quad \ln^{(4)}(x) = -6\,\frac{1}{x^4}$$

$$= \Big[\ln(x) \cdot x - x\Big]_1^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \ln(x)\Big|_1^{n+1} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x}\Big|_1^{n+1} + \left(-\frac{1}{30}\right) \cdot \frac{1}{24} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^3}\Big|_1^{n+1} + R_4 =$$

$$B_0 = B_0(0) = 1, \quad B_1 = B_1(0) = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = B_2(0) = \frac{1}{6}, \quad B_3 = B_3(0) = 0, \quad B_4 = B_4(0) = -\frac{1}{30}$$

Let's recall the values of small Bernoulli numbers, since it's always handy to have them listed near Euler's general formula:

$$B_0 = 1, \; B_1 = -\tfrac{1}{2}, \; B_2 = \tfrac{1}{6}, \; B_4 = -\tfrac{1}{30}, \; B_6 = \tfrac{1}{42}, \; B_8 = -\tfrac{1}{30};$$
$$B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = B_{11} = \cdots = 0.$$

$$= \ln(n+1) \cdot (n+1) - (n+1) + 1 - \frac{1}{2} \cdot \ln(n+1) + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n+1} - \frac{1}{12} - \frac{1}{360} \cdot \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{360} + R_4$$

$$= \underbrace{\ln(n+1) \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)}_{= \ln\left((n+1)^{n+\frac{1}{2}}\right)} - n - \frac{29}{360} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n+1} - \frac{1}{360} \cdot \frac{1}{(n+1)^3} + R_4$$

$$n! = e^{\ln(n!)} = \underbrace{\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}}_{= \sqrt{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{e}\right)^n} \cdot e^{-\frac{29}{360} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n+1} - \frac{1}{360} \cdot \frac{1}{(n+1)^3} + R_4}$$

$$R_m = (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\, dx, \quad \text{integers } a \leqslant b; \text{ integer } m \geqslant 1. \qquad (9.68)$$

$$R_4(n) = R_4 = \underbrace{(-1)^5}_{=-1} \cdot \int_1^{n+1} \frac{B_4(\{x\})}{24} \cdot (-6) \cdot \frac{1}{x^4}\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int_1^{n+1} \frac{B_4(\{x\})}{x^4}\, dx$$

Δ-Ungleichung

$\le S$ für ein S, da stetige Fkt'en auf kompakten Intervallen (wie $[0,1]$) beschränkt

$$|R_4(\infty)| = \left|\frac{1}{4} \cdot \int_1^{\infty} \frac{B_4(\{x\})}{x^4}\, dx\right| \le \frac{1}{4} \cdot \int_1^{\infty} \frac{|B_4(\{x\})|}{x^4}\, dx \le \frac{1}{4} \int_1^{\infty} \frac{S}{x^4}\, dx = \frac{S}{4}\left[\frac{1}{-3}\frac{1}{x^3}\right]_1^{\infty} < \infty$$

$\Rightarrow R_4(\infty)$ existiert

$$\left|\frac{1}{4} \int_{n+1}^{\infty} \frac{B_4(\{x\})}{x^4}\, dx\right| \le \frac{1}{4} \cdot S \cdot \int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^4}\, dx = \frac{1}{4} \cdot S \left[-\frac{1}{3}\frac{1}{x^3}\right]_{n+1}^{\infty} = \frac{1}{4} \cdot S \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(n+1)^3} \in O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\Rightarrow R_4 = R_4(\infty) - \frac{1}{4} \int_{n+1}^{\infty} \frac{B_4(\{x\})}{x^4} = \underbrace{R_4(\infty)}_{\text{Konstante}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$n! = e^{\ln(n!)} = \underbrace{\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}}_{= \sqrt{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{e}\right)^n} \cdot e^{-\frac{29}{360} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n+1} - \frac{1}{360} \cdot \frac{1}{(n+1)^3} + R_4}$$

$$= \sqrt{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{e}\right)^n \cdot e^{-\frac{29}{360} + \frac{1}{12}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{360}\frac{1}{(n+1)^3} + R_4(\infty) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)}$$

$$= \sqrt{n+1} \cdot e^{-\frac{29}{360} + R_4(\infty)} \left(\frac{n+1}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O\left(x^3\right)$$

$$e^{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)} = 1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) + \frac{\left(\frac{1}{12}\frac{1}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2}{2} + \underbrace{\frac{\left(\; \dots \;\right)^3}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) + \frac{1}{288} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{288}\frac{1}{(n+1)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\Rightarrow n! = \sqrt{n+1} \cdot e^{-\frac{29}{360} + R_4(\infty)} \cdot \left(\frac{n+1}{e}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{288}\frac{1}{(n+1)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Noch zu zeigen:

$$e^{-\frac{29}{360}+R_4(\infty)} \overset{!}{=} \sqrt{2\pi}$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \tfrac{1}{30}.$$

$$R_4(\infty) = \frac{1}{4}\int_1^\infty \frac{B_4(\{x\})}{x^4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{B_4(\overbrace{\{x\}}^{=x-k})}{x^4}\,dx = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{(x-k)^4-2\cdot(x-k)^3+(x-k)^2-\frac{1}{30}}{x^4}\,dx$$

Polynomdivision +
Partialbruchzerlegung $\rightarrow$ =

$\rightarrow = \sqrt{2\pi}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 = \frac{\pi}{6}$$

Basler

Basler Problem

20. **(2 Punkte)** Zeigen Sie Bemerkung 3.15 (1), dass also die erste Approximation im Romberg-Verfahren, die nicht bloß Trapez-Summen involviert der Simpson-Regel gleichen.

$h_0 = b-a \qquad h_1 = \frac{b-a}{2}$

Extrapolation

Wir werden nun noch eine alternative Herleitung des Romberg-Verfahrens betrachten.

Es seien $h_0 > h_1 > \cdots > h_n > 0$ Schrittweiten mit $\frac{b-a}{h_i} \in \mathbb{N}$ für $i = 0, \dots, n$. Dann lautet das Vorgehen wie folgt:

1) Berechne $T_{h_i}(f)$ für alle $i = 0, \dots, n$.
2) Interpoliere $(h_i^2, T_{h_i}(f))$ für $i = 0, \dots, n$ mit einem Polynom $p \in \mathbb{P}_n$ in h^2, das heißt
$$p(h^2) = a_0 + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \cdots + a_n h^{2n}$$
mit
$$p(h_i^2) = T_{h_i}(f), \quad i = 0, \dots, n.$$
3) Betrachte $p(0)$ als neue Näherung für $I(f)$ (Extrapolation auf $h = 0$).

Bemerkung 3.15. (1) Für $h_0 = (b-a)$, und $h_1 = \frac{h_0}{2}$ folgt
$$T_{1,1} = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h \frac{f(a+ih) + f(a+(i+1)h)}{2}$$
$$= h\left(\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(b-h) + \frac{1}{2}f(b)\right)$$
$$= T_h(f)$$

S. 63 unten

zu 1)

$T_{h_0}(f) =$

$= h_0 \left(\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b)\right)$

$= (b-a) \cdot \frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

$T_{h_1}(f) =$

$= h_1 \cdot \left(\frac{1}{2} f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} f(b)\right)$

$= \frac{1}{2}(b-a)\left(\frac{1}{2} f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} f(b)\right)$

zu 2)

$$p\Big(\underbrace{(b-a)^2}_{x_0}\Big) \overset{!}{=} \overbrace{(b-a) \cdot \frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right)}^{y_0}$$

$$p\Big(\underbrace{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}_{x_1}\Big) \overset{!}{=} \underbrace{\frac{1}{2}(b-a)\left(\frac{1}{2} f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} f(b)\right)}_{y_1}$$

$x_0, \dots, x_n$ Stützstelle

$$L_k^n(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$p(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) =$

$= y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} =$

$I(f) = p_0 = y_0 \cdot \frac{-x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \cdot \frac{-x_0}{x_1 - x_0} =$

$=$