$$x_1 \le 500$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

(a) Lösen Sie beide Probleme mit Hilfe des Simplex-Algorithmus und Bland's Rule.

$$\max \underbrace{(30\ 20\ 0\ 0\ 0)}_{c^T} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 1500 \\ x_1 + x_2 + \quad x_4 \quad &= 1200 \\ x_1 + \quad\quad x_5 &= 500 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

$$\max c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \ge 0$$

$$\max \underbrace{(30\ \ 20\ \ 0\ 0\ 0)}_{c^T} \cdot x$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1500 \\ 1200 \\ 500 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$x \ge 0$$

$$B_1 = \{3, 4, 5\}$$

$$\begin{array}{c|c} c^T - c_B^T A_{.B}^{-1} A & -c_B^T A_{.B}^{-1} b \\ \hline A_{.B}^{-1} A & A_{.B}^{-1} b \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & j=1 & & & & k=5 & \\ & 30 & 20 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 0 \\ \hline & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1500 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1200 \\ i=3 \rightarrow & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 500 \end{array}$$

While $c^T - c_B^T A_{.B}^{-1} A \not\le 0$:

Spaltenwahl: *Wähle j mit $c_j - c_B^T A_{.B}^{-1} A_{.j} > 0$.*

Zeilenwahl: *Berechne $i \in \operatorname{argmin}\left\{ \frac{(A_{.B}^{-1} b)_i}{(A_{.B}^{-1} A_{.j})_i} \mid (A_{.B}^{-1} A_{.j})_i > 0 \right\}$. Falls diese Menge leer ist: STOP. Das Programm ist unbeschränkt.*

Basiswechsel: *Sei k der Spaltenindex, in dem in $A_{.B}^{-1} A$ der i-te Einheitsvektor steht. Setze $B = (B \cup \{j\}) \setminus \{k\}$.*

$$-c_B^T \cdot A_{.B}^{-1} \cdot b \qquad B_2 = \{1, 3, 4\}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & & j=2 & k=3 & & & \\ & \underline{0} & 20 & \underline{0} & \underline{0} & -30 & -15000 \\ \hline i=1 \rightarrow & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 500 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 700 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 500 \end{array}$$

$$c^T - c_B^T \cdot A_{.B}^{-1} \cdot b \qquad B_3 = \{1, 2, 4\}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & & & & k=4 & j=5 & \\ & \underline{0} & \underline{0} & -20 & \underline{0} & 10 & -25000 \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 500 \\ i=2 \rightarrow & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 200 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 500 \end{array} \quad -c_B^T \cdot A_{.B}^{-1} \cdot b$$

$$-c_B^T \cdot A_{.B}^{-1} \cdot b \qquad B_4 = \{1, 2, 5\}$$

$\uparrow$ optimale Basis

$\downarrow$ optimale Basislösung

$$\begin{array}{ccccc|c} \underline{0} & \underline{0} & -10 & -10 & \underline{0} & -27000 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 900 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 200 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 300 \end{array}$$

$$x_{.B_4} = A_{.B_4}^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 900 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$x_{.\{1,\dots,5\} \setminus B_4} = 0$$

$$x = \begin{pmatrix} 900 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix}$$

5.2.3 Definition. Habe $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ vollen Zeilenrang und sei $b \in \mathbb{K}^m$. Wir nennen eine Menge $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ von Spaltenindizes eine *Basis* von A, wenn $A_{.B}$ regulär ist. Wenn darüber hinaus $A_{.B}^{-1} b \ge 0$ ist, so heißt B *zulässige Basis*. Ist B eine (zulässige) Basis, so nennen wir $N := \{1, \dots, n\} \setminus B$ *(zulässige) Nichtbasis* und den Vektor $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$x_B = A_{.B}^{-1} b, \qquad x_N = 0$$

(zulässige) Basislösung.

E 4.5 Verwenden Sie das Simplex-Verfahren und die *Zwei-Phasen-Methode*.

max $c^T x$
$Ax = b$
$x \geq 0$

$$\max \quad x_2 + x_5$$

unter

$$\begin{array}{l}
x_1 + x_4 + x_5 - x_7 = 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
x_2 + x_5 + x_6 \leq 1 \\
x_3 + x_4 + x_6 = 1
\end{array}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

max $c^T x$
$A \cdot x = b$
$x \geq 0$

$$\max \underbrace{(0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)}_{c^T} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x \geq 0$$

$$\max \quad -y_1 - y_2 - y_3$$

$$\begin{array}{l}
x_1 + x_4 + x_5 - x_7 + y_1 = 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 + y_2 = 1 \\
x_2 + x_5 + x_6 + x_8 = 1 \\
x_3 + x_4 + x_6 + y_3 = 1
\end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

$B_1 = \{8, 9, 10, 11\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_8 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(0\ 1\ 1\ 1)$

$c^T - c_B^T A_{\cdot B}^{-1} \cdot A \qquad -c_B^T \cdot A_{\cdot B}^{-1} \cdot b$

$$\begin{array}{ccccccccccc|c}
2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & -1 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 3 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

$A_{\cdot B}^{-1} \cdot b$

$$\begin{array}{c|c}
c^T - c_B^T A_{\cdot B}^{-1} A & -c_B^T A_{\cdot B}^{-1} b \\
\hline
A_{\cdot B}^{-1} A & A_{\cdot B}^{-1} b
\end{array}$$