Sei $f(x) = x$, $0 \le x \le \pi$.
Sei g die ungerade Fortsetzung von f auf das Intervall $[-\pi, \pi]$.

Entwickeln Sie die Funktion g auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ in eine Fourierreihe.

Geben Sie in jedem Punkt $x \in [-\pi, \pi]$ den Wert der Fourierreihe von g an.

Entwickeln Sie die Funktion f auf dem Intervall $[0, \pi]$ in eine reine Cosinusreihe.

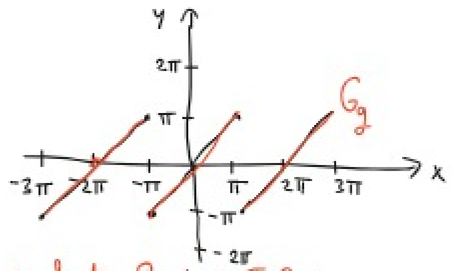
Bestimmen Sie die Lösung des Randanfangswertproblems

$$u_{xx} - 2u_{tt} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = x, \quad 0 \le x \le 2,$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 2,$$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0, \quad t \ge 0.$$



g hat Periode $T = 2\pi$

Definition 37.5 (Fourierkoeffizienten und Fourierpolynom). Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) eine stückweise monotone Funktion der Periode $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann heißen

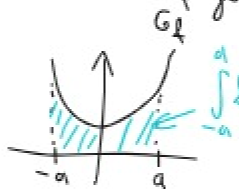
$$a_k = \langle f, \cos(k\omega t)\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt,$$

$$b_k = \langle f, \sin(k\omega t)\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt,$$

Fourier-Polynom vom Grad n

$$\phi_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t))$$

f gerade $\Rightarrow \forall a > 0$:



$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\cdot\int_0^a f(t)\,dt$$

Falls f gerade $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: b_k = 0 \wedge a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\omega t)\,dt$

Falls f ungerade $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}_0: a_k = 0 \wedge b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\sin(k\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\omega t)\,dt$

g, f ungerade
$(g\cdot f)(-x) = g(-x)\cdot f(-x) =$
$= (-1)\cdot g(x)\cdot(-1)\cdot f(x) = g(x)\cdot f(x)$
$\Rightarrow g\cdot f$ gerade

$$b_k = \frac{4}{2\pi}\cdot\int_0^{\pi} t\cdot\sin(k\omega t)\,dt = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\left[t\cdot\frac{-\cos(k\omega t)}{k\omega}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot\frac{-\cos(k\omega t)}{k\omega}\,dt\right) =$$

$$\int_a^b f\cdot g'\,dx = [f\cdot g]_a^b - \int_a^b f'\cdot g\,dx$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$= \frac{2}{\cancel{\pi}}\cdot\left(\cancel{\pi}\cdot(-1)\cdot\frac{\overbrace{\cos(\pi\cdot k)}^{(-1)^k}}{k} + \frac{1}{k}\cdot\underbrace{\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi}}_{\frac{\sin(k\pi)}{k} = 0}\right)$$

$$= \frac{2}{k}\cdot(-1)^{k+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\cdot(-1)^{k+1}\cdot\sin(kt)}$$

b) Ansatz der getrennten Variablen:

$$u(x,t) = V(x)\cdot W(t)$$

$$V''(x)\cdot W(t) - 2\cdot V(x)\cdot W''(t) = 0 \quad | + 2V\cdot W''$$

$$V''(x)\cdot W(t) = 2\cdot V(x)\,W''(t) \quad | : (V(x)\cdot W(t))$$

$$\frac{V''(x)}{V(x)} = 2\cdot\frac{W''(t)}{W(t)}$$

$\Rightarrow$ Wir finden Separationskonstante $\delta \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{V''(x)}{V(x)} = \delta \quad \text{und} \quad 2\cdot\frac{W''(t)}{W(t)} = \delta$$

Harmonischer Oszillator

$$y'' = -\omega^2\cdot y$$

Allgemeine Lsg ist:

$$y(t) = A\cdot\cos(\omega t) + B\cdot\sin(\omega\cdot t)$$

$$y'' = \omega^2\cdot y$$

Allgemeine Lsg

$$y(t) = Ae^{\omega t} + B\cdot e^{-\omega t}$$

1. Fall $\delta = s^2 > 0$

$$V''(x) = s^2\cdot V(x)$$

$$V(x) = A\cdot e^{st} + B\cdot e^{-st}$$

$$W''(t) = \frac{s^2}{2}\cdot W(t) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot W(t)$$

$$W(t) = C\cdot e^{\frac{s}{\sqrt{2}}t} + D\cdot e^{-\frac{s}{\sqrt{2}}t}$$

2. Fall $\delta = -s^2 < 0$

$$V''(x) = -s^2\cdot V(x)$$

$$V(x) = A\cdot\cos(s\cdot t) + B\cdot\sin(s\cdot t)$$

$$W''(t) = -\frac{s^2}{2}\cdot W(t)$$

$$W(t) = C\cdot\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}t\right) + D\cdot\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}t\right)$$

$$W'(t) = -\frac{C\cdot s}{\sqrt{2}}\cdot\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}t\right) + \frac{D\cdot s}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}t\right)$$

miro

$\ldots e^{\omega t} + B\cdot e^{\ldots}$

$u_{xx} - 2u_{tt} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$

$u(x,0) = x, \quad 0 \le x \le 2,$

$u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 2,$

$u(0,t) = u(2,t) = 0, \quad t \ge 0.$

$V(x) = A\cdot\cos(S\cdot t) + B\cdot\sin(S\cdot t)$

$W'(t) = -\frac{C\cdot S}{\sqrt{2}}\cdot\sin\left(\frac{S}{\sqrt{2}}t\right) + \frac{D\cdot S}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{S}{\sqrt{2}}t\right)$

$u(0,t) = V(0)\cdot W(t) = A\cdot W(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow A = 0$

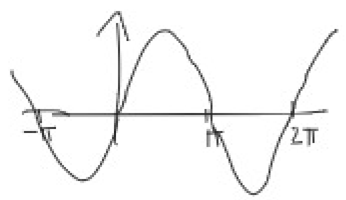
$u_t(x,0) = V(x)\cdot W'(0) = V(x)\cdot\frac{D\cdot S}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow D = 0$

$u(2,t) = V(2)\cdot W(t) = B\cdot\sin(2\cdot S)\cdot W(t) = 0 \quad \forall t$

$\Rightarrow \sin(2\cdot S) = 0$

$\Rightarrow 2\cdot S \in \{k\pi \mid k\in\mathbb{N}\}$

$\Rightarrow S = \frac{k\pi}{2}$ für ein $k\in\mathbb{N}$



$\Rightarrow \forall k\in\mathbb{N}$ ist $u_k(x,t) = \cancel{B}\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\cancel{C}\cdot\cos\left(\frac{k\pi}{2\sqrt{2}}\cdot t\right)\cdot c$ ist Lsg. von

$\Rightarrow$ Da wir eine lineare partielle DGL haben

$\Rightarrow$ Jede Linearkombi ist Lsg $\Rightarrow$

$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\cdot u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\cos\left(\frac{k\pi}{2\sqrt{2}}t\right)$ ist Lsg!

$u(x,0) = x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k\pi}(-1)^{k+1}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\cdot x\right) \stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} C_k\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{2}\cdot x\right)$ $\quad \frac{2}{k}\cdot(-1)$

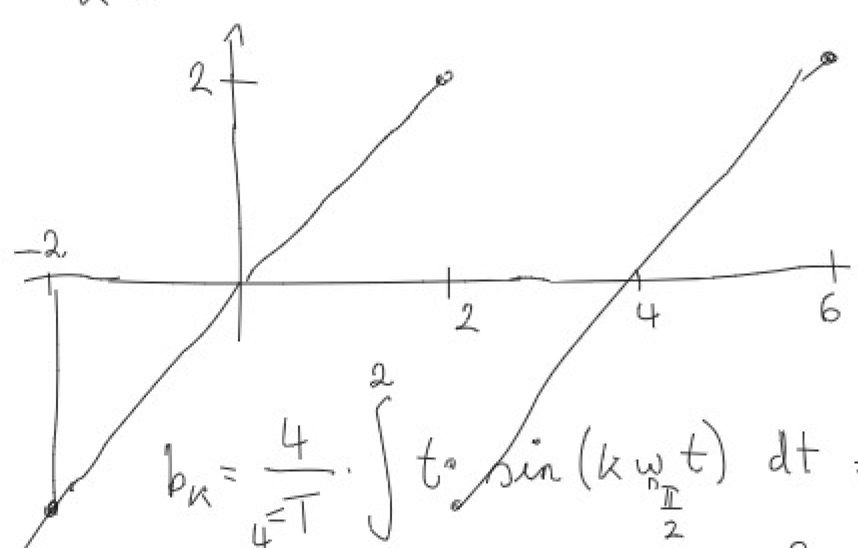
$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k\pi}\cdot(-1)^{k+1}\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\cos\left(\frac{k\pi}{2\sqrt{2}}\cdot t\right)$

Lsg. des Randwertproblems!

$\sin(k\omega x)$

$\frac{2\pi}{T} = \omega = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow T = 4$



$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$

$b_k = \frac{4}{T}\cdot\int_0^2 t\cdot\sin(k\underset{\frac{\pi}{2}}{\omega}t)\,dt =$

$\left[t\cdot\frac{-\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{k\frac{\pi}{2}}\right]_0^2 - \int_0^2 1\cdot\frac{-\cos\left(k\frac{\pi}{2}t\right)}{k\frac{\pi}{2}}\,dt$

$= 2\cdot\frac{-\cos(k\pi)}{k\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{k\pi}\underbrace{\left[\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}t\right)}{k\frac{\pi}{2}}\right]_0^2}_{=0}$

$= \frac{4}{k\pi}\cdot(-1)^{k+1}$

miro