2. Aufgabe (12 Punkte)

Geben Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{cases} y_1'(x) = 5y_1(x) + 3y_2(x), \\ y_2'(x) = -2y_1(x) + 1\,. \end{cases}$$

$$\frac{5}{2} + 3 \cdot y_2 = 0$$

$$y_2 = \frac{5}{2} : 3 = \frac{5}{6}$$

$$y_p(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Homogene DGL

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$y_h(x) = v_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + v_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$$

Eigenvektor zum Eigenwert lambda2 von A

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Die Laplacegleichung (*) auf einem Halbkreisring mit gegebenen Dirichlet-Randbedingungen soll in Polarkoordinaten gelöst werden. Dafür betrachten wir das Randwertproblem

$$\begin{cases} \partial_{rr}u(r,\varphi)+\frac{1}{r}\partial_r u(r,\varphi)+\frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}u(r,\varphi)=0, & (r,\varphi)\in(1,2)\times(0,\pi), \\ u(1,\varphi)=\sin(\varphi), & \varphi\in[0,\pi], \\ u(2,\varphi)=0, & \varphi\in[0,\pi], \\ u(r,0)=u(r,\pi)=0, & r\in[1,2]. \end{cases}$$

Lösen Sie das Randwertproblem.

Hinweis: Die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Sturm-Liouville-Eigenwertproblems

$$\begin{cases} w''(x)=\lambda w(x), & x\in[0,\pi], \\ w(0)=w(\pi)=0 \end{cases}$$

können als bekannt angesehen und ohne Herleitung verwendet werden.

Hinweis: Der Ansatz r^α, $\alpha\in\mathbb{R}$ kann helfen.

Separation-Ansatz: $u(r,\varphi) = X(r)\cdot Y(\varphi)$

$$\partial_{rr}u = X''\cdot Y \qquad \partial_{\varphi\varphi} = X\cdot Y''$$

$$\partial_r u = X'\cdot Y$$

Ansatz in (*): $X''\cdot Y + \frac{1}{r}\cdot X'\cdot Y + \frac{1}{r^2}\cdot X\cdot Y'' = 0 \quad |:X$

$$\frac{X''}{X}\cdot Y + \frac{1}{r}\frac{X'}{X}\cdot Y + \frac{1}{r^2}\cdot Y'' = 0 \quad |:Y$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{1}{r}\cdot\frac{X'}{X} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{Y''}{Y} = 0 \quad |\cdot r^2$$

$$r^2\frac{X''}{X} + r\frac{X'}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

$$r^2\frac{X''}{X} + r\cdot\frac{X'}{X} = -\frac{Y''}{Y}$$

Seperation der Variablen

Beide Seiten müssen gleich einer Seperationskonstante λ sein, damit das $\forall r,\varphi$ stimmt

(**)

sein, damit das $\forall r, \varphi$ stimmt

$$-\frac{Y''}{Y} = \delta \quad \text{und} \quad r^2 \frac{X''}{X} + r \cdot \frac{X'}{X} = \delta \quad (**)$$

Harmonischer Oszillator

$y''(t) = -w^2 \cdot y(t)$

$y(t) = A \cdot \cos(wt) + B \cdot \sin(wt)$

$\delta = w^2$

$w = \sqrt{\delta}$

$Y'' = -\delta \cdot Y$

$Y(\varphi) = A \cdot \cos(\sqrt{\delta} \cdot t) + B \cdot \sin(\sqrt{\delta} \cdot t)$

Ansatz: $X(r) = r^{\alpha}$

$X'(r) = \alpha \cdot r^{\alpha-1}$

$X''(r) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot r^{\alpha-2}$

in $(**)$: $r^2 \cdot \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot r^{\alpha-2}}{r^{\alpha}} + r \cdot \frac{\alpha \cdot r^{\alpha-1}}{r^{\alpha}} = \delta$

$\alpha \cdot (\alpha-1) + \alpha = \delta$

$\alpha^2 = \delta \quad \Rightarrow \delta > 0$ muss sein

$\alpha = \pm\sqrt{\delta} \quad \Rightarrow X(r) = r^{\sqrt{\delta}}$ oder $X(r) = r^{-\sqrt{\delta}}$

$$u(r,\varphi) = X(r) \cdot Y(\varphi) = r^{\sqrt{\delta}} \cdot \left(A \cos(\sqrt{\delta} \cdot \varphi) + B \cdot \sin(\sqrt{\delta} \cdot \varphi)\right)$$

3. Aufgabe (12 Punkte)

Die Laplacegleichung auf einem Halbkreisring mit gegebenen Dirichlet-Randbedingungen soll in Polarkoordinaten gelöst werden. Dafür betrachten wir das Randwertproblem

$$(*) \begin{cases} \partial_{rr} u(r,\varphi) + \frac{1}{r}\partial_r u(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi} u(r,\varphi) = 0, & (r,\varphi) \in (1,2) \times (0,\pi), \\ u(1,\varphi) = \sin(\varphi), & \varphi \in [0,\pi], \\ u(2,\varphi) = 0, & \varphi \in [0,\pi], \\ u(r,0) = u(r,\pi) = 0, & r \in [1,2]. \end{cases}$$

Lösen Sie das Randwertproblem.

Hinweis: Die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Sturm-Liouville-Eigenwertproblems

$$\begin{cases} w''(x) = \lambda w(x), & x \in [0,\pi], \\ w(0) = w(\pi) = 0 \end{cases}$$

können als bekannt angesehen und ohne Herleitung verwendet werden.

Hinweis: Der Ansatz r^{α}, $\alpha \in \mathbb{R}$ kann helfen.

$u(r,0) = 0 \Rightarrow r^{\sqrt{\delta}} \cdot A = 0 \quad | \forall r \quad \Rightarrow A = 0$

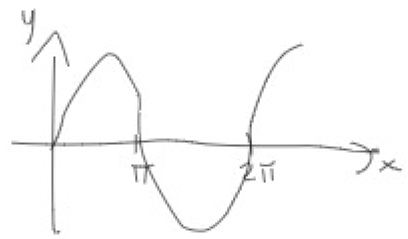
$u(r,\pi) = 0 \Rightarrow \underbrace{r^{\sqrt{\delta}} \cdot B}_{\neq 0} \cdot \sin(\sqrt{\delta} \cdot \pi) = 0$

$\Rightarrow \sin(\sqrt{\delta} \cdot \pi) = 0$

$\sqrt{\delta} \cdot \pi = n \cdot \pi, \; n \in \mathbb{N} \quad | : \pi$

$\sqrt{\delta} = n$

$\delta = n^2$



$\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\}$

$= \{\pi, 2\pi, 3\pi, \dots\} = \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ ist $u_n(r,\varphi) = r^n \cdot \sin(n \cdot \varphi)$ oder $u_n(r,\varphi) = r^{-n} \cdot \sin(n \cdot \varphi)$ eine Lsg. von $(*)$ mit $u_n(r,0) = u_n(r,\pi) = 0$

Da es eine lineare DGL ist

$$\Rightarrow u(r,\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} B_n \cdot r^n \cdot \sin(n \cdot \varphi) + C_n \cdot r^{-n} \cdot \sin(n \cdot \varphi)$$ ist auch Lsg. von $(*)$ mit $u_n(r,0) = u_n(r,\pi) = 0$

Wir müssen die B_n und C_n bestimmen, sodass die anderen Randbedingungen erfüllt sind!

$u(r,\varphi)$ ... $\sin(\varphi)$

Wir müssen die B_n und C_n bestimmen, sodass die anderen Randbedingungen erfüllt sind!

$$u(1,\varphi) = \sin(\varphi)$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} B_n \cdot \sin(n\cdot\varphi) + C_n \cdot \sin(n\cdot\varphi) = \sin(\varphi)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}: B_n = C_n = 0$$

$$u(2,\varphi) = 0$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} B_n \cdot 2^n \cdot \sin(n\cdot\varphi) + C_n \cdot 2^{-n} \cdot \sin(n\cdot\varphi) = 0$$

$\Rightarrow$

$$B_1 \cdot \sin(\varphi) + C_1 \cdot \sin(\varphi) = \sin(\varphi)$$

$$(B_1 + C_1)\sin\varphi = \sin\varphi \quad | : \sin\varphi$$

$$\text{I)}\ B_1 + C_1 = 1$$

$$B_1 \cdot 2 \cdot \sin(\varphi) + C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(\varphi) = 0$$

$$(2B_1 + \tfrac{1}{2}C_1) \cdot \sin\varphi = 0$$

$$\text{II)}\ 2B_1 + \frac{1}{2}C_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\text{II}-2\text{I}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \frac{2}{1{,}5} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = 2 : \frac{3}{2} = 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$B_1 + C_1 = 1$$

$$B_1 = 1 - C_1 = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

Lsg. des ganzen Problem ist

$$\Rightarrow \quad u(r,\varphi) = r\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\sin(\varphi) + \frac{1}{r}\cdot\frac{4}{3}\cdot\sin(\varphi)$$

$$= \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{r} - \frac{1}{3}r\right)\cdot\sin(\varphi)$$

miro

Aufgabe G39 (Partielle Differentialgleichungen)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung mit Randbedingungen

$$(*)\quad \begin{cases} t^2\partial_{xx}u(x,t) - \partial_t u(x,t) = 0, & \text{für } (x,t) \in (0,1)\times(0,\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \text{für } t \in (0,\infty). \end{cases}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Resultate aus Aufgabe G38(a).

$$u(x,t) = X(x)\cdot Y(t)$$

$$\partial_{xx}u = X''\cdot Y$$

$$\partial_t u = X\cdot Y'$$

in $(*)$: $\quad t^2\cdot X''Y - X\cdot Y' = 0 \quad | : Y$

$$t^2 X'' - X\frac{Y'}{Y} = 0 \quad | : X$$

$$t^2\cdot\frac{X''}{X} - \frac{Y'}{Y} = 0 \quad | : t^2$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{t^2}\frac{Y'}{Y}$$

$$\frac{X''}{X} = -\delta \quad \text{und} \quad \frac{1}{t^2}\frac{Y'}{Y} = -\delta$$

$$Y' = -\delta\cdot t^2\cdot Y$$

Lsg. mit **Seperation der Variablen**

$$X'' = -\delta\cdot X$$

Falls $\delta > 0$

$$X(x) = A\cdot\cos(\sqrt{\delta}\cdot x) + B\cdot\sin(\sqrt{\delta}\cdot x)$$

$$u(0,t) = 0$$

$$X(0)\cdot\underbrace{Y(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$A + B\cdot 0 = 0 \Rightarrow A = 0$$