

EXERCICE 2

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mu_C)$ (mesure de comptage). On considère les fonctions $f(k) = \frac{1}{k^2}$ et pour tout $n \geq 0$ et pour n entier, $f_n(k) = \frac{n^2 - 27n + k}{(k+n^2)k^2}$

1. On considère k fixé, montrer que la suite $f_n(k) \rightarrow f(k)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Interpréter ceci en termes de convergence simple.

2. La suite (f_n) est-elle croissante ? *non - croissante*

3. Montrer qu'il existe M tel que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$

$$\left| \frac{n^2 - 27n + k}{(k+n^2)k^2} \right| \leq M = 28$$

4. En déduire que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 27n + k}{(k+n^2)k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad (1)$$

$$\left| \frac{n^2 - 27n + k}{k+n^2} \right| = \left| \frac{-27n + k + n^2}{k+n^2} \right| = \left| \frac{-27n}{k+n^2} + 1 \right| \leq$$

$$\Delta\text{-inégalité} \rightarrow \leq 27 \cdot \frac{n}{k+n^2} + 1$$

$$\leq 27 \cdot 1 + 1 = \underline{\underline{28}}$$

Plus _____ le dénominateur
plus grande la fraction.

EXERCICE 2

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mu_C)$ (mesure de comptage). On considère les fonctions $f(k) = \frac{1}{k^2}$ et pour tout $n \geq 0$ et pour n entier, $f_n(k) = \frac{n^2 - 27n + k}{(k+n^2)k^2}$

1. On considère k fixé, montrer que la suite $f_n(k) \rightarrow f(k)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Interpréter ceci en termes de convergence simple.

2. La suite (f_n) est-elle croissante ? *non*

3. Montrer qu'il existe M tel que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$

$$\left| \frac{n^2 - 27n + k}{(k+n^2)k^2} \right| \leq M$$

$$\begin{aligned} \mu_C(\{1, 3, 43\}) &= 3 \\ \mu_C(\{1, 1003\}) &= 2 \\ \mu_C(\{k\}) &= 1 \\ 0 \notin \mathbb{N}^* &= \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

4. En déduire que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 27n + k}{(k+n^2)k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_n(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_n(k) \cdot \mu_C(\{k\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}_{\geq 1}} f_n(k) d\mu_C(k) \stackrel{\text{convergence dominée}}{\downarrow} \int_{\mathbb{N}_{\geq 1}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(k) d\mu_C(k) = \int_{\mathbb{N}_{\geq 1}} \frac{1}{k^2} d\mu_C(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\int_{\mathbb{N}_{\geq 1}} f_n(k) d\mu_C(k) = \int_{\mathbb{N}_{\geq 1}} \sum_{k=1}^N \frac{n^2 - 27n + k}{n^2 + k} \cdot \mathbb{1}_{\{k\}} d\mu_C(k)$$

$$\stackrel{\text{convergence de Borel-Cantelli}}{\Rightarrow} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}_{\geq 1}} \sum_{k=1}^N \frac{n^2 - 27n + k}{n^2 + k} \cdot \mathbb{1}_{\{k\}} d\mu_C(k)$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{n^2 - 27n + k}{n^2 + k} \underbrace{\mu_C(\{k\})}_{=1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^2 - 27n + k}{n^2 + k}$$

l'intégral
d'une fonction
et faite

$(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est
croissante

EXERCICE 3

1. Montrer que la fonction $h : [0, 1] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = e^{-x} \sin(2xy)$ est une fonction intégrable.
2. On définit pour la fonction $I(x) = \int_0^{+\infty} h(x, y) dy$.
 - a) à l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(x) = 2x \int_0^{+\infty} e^{-y} \cos(2xy) dy$.
 - b) à l'aide d'une deuxième intégration par parties, en déduire que $I(x) = \frac{2x}{1+4x^2}$.
3. En déduire $\int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} h(x, y) dy \right) dx$.
4. Démontrer du théorème de Fubini la valeur de $\int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 h(x, y) dx \right) dy$.
5. Que vaut $\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx$?

A montrer : $\iint_{\mathbb{R}^2} |\delta(x, y)| d\delta^2(x, y) < \infty$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |\delta(x, y)| d\delta^2(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} |h(x, y)| dy dx$$

$$\int_0^\infty e^{-y} dy = \int_{[0, \infty)} e^{-y} d\delta(y)$$

Définition
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 Riemann-intégrale (pas simple continue)

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\delta(x)$$

$$\int_{[0, \infty)} e^{-y} dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{y \in [0, \infty)} e^{-y} \cdot \underbrace{\text{1I}_{[0, 1/n]}(y)}_{\geq 0} dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, 1/n]} e^{-y} dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-y} dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^{-y} \right]_0^n$$

On peut utiliser Skype maintenant

Soit (E, \mathcal{A}, μ) et (F, \mathcal{B}, ν) deux espaces mesurés.

Théorème (Théorème de Fubini-Tonelli)

Pour toute fonction mesurable positive f sur $E \times F$,

$$\int_{E \times F} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_E \left(\int_F f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_F \left(\int_E f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \quad (*)$$

Théorème (Théorème de Fubini-Lebesgue)

Pour toute fonction mesurable $f : E \times F \rightarrow \mathbb{C}$, telle que

$$\int_{E \times F} |f(x, y)| d(\mu \otimes \nu)(x, y) < \infty,$$

la suite d'égalités (4) reste vraie.

NB. Pour le théorème de Fubini-Tonelli, la condition équivaut à

$$\int_E \left(\int_F |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty \quad \text{ou} \quad \int_F \left(\int_E |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty.$$



[Zoom](#)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-y} dy &= \int_0^\infty -\lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} - (-1) dx = \int_0^\infty 1 dx = \left[x \right]_0^\infty = 1 - 0 = 1 < \infty \end{aligned}$$

EXERCICE 3

1. Montrer que la fonction $h : [0, 1] \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = e^{-y} \sin(2xy)$ est une fonction intégrable.

2. On définit pour la fonction $I(x) = \int_0^{+\infty} h(x, y) dy$.

a) à l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(x) = 2x \int_0^{+\infty} e^{-y} \cos(2xy) dy$.

b) à l'aide d'une deuxième intégration par parties, en déduire que $I(x) = \frac{2x}{1+4x^2}$.

$$3. \text{ En déduire } \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} h(x, y) dy \right) dx = \left[\ln(1+4x^2) \right]_0^1 = \ln(5) - \ln(1) = \ln(5)$$

$$4. \text{ Déduire du théorème de Fubini la valeur de } \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 h(x, y) dx \right) dy = \int_0^{+\infty} \ln(5) dy = 0$$

$$5. \text{ Que vaut } \int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{(\sin y)^2}{y} dy ?$$

$$3.) \int_0^1 \int_0^{+\infty} \ln(1+4x^2) dx = \int_0^1 \frac{2x}{1+4x^2} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{8x}{1+4x^2} dx$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln(u(x))$$

$$\begin{aligned} f &:= \int_0^1 h(x, y) dx = \int_0^1 e^{-y} \sin(2xy) dx = e^{-y} \cdot \left[-\frac{\cos(2xy)}{2y} \right]_0^1 = \\ &= e^{-y} \left(-\frac{\cos(2y)}{2y} - (-1) \right) \\ &= e^{-y} \cdot \left(\frac{1}{2y} - \frac{\cos(2y)}{2y} \right) = \\ &= \frac{e^{-y}}{2y} \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{\cos(2y)}{2y}}_{= 2\cos^2(y) - 1} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-y}}{2y} \cdot \cancel{2} \cdot \left(1 - \underbrace{\cos^2(y)}_{\sin^2(y)} \right)$$

$$= e^{-y} \cdot \frac{\sin^2(y)}{y}$$

Soit (E, \mathcal{A}, μ) et (F, \mathcal{B}, ν) deux espaces mesurés.

Théorème (Théorème de Fubini-Tonelli)

Pour toute fonction mesurable positive f sur $E \times F$,

$$\int_{E \times F} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_E \left(\int_F f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_F \left(\int_E f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \quad (*)$$

Théorème (Théorème de Fubini-Lebesgue)

Pour toute fonction mesurable $f : E \times F \rightarrow \mathbb{C}$, telle que

$$\int_{E \times F} |f(x, y)| d(\mu \otimes \nu)(x, y) < \infty,$$

la suite d'égalités $\boxed{(*)}$ reste vraie.

NB. Par le théorème de Fubini-Tonelli, la condition équivaut à

$$\int_E \left(\int_F |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty \quad \text{ou} \quad \int_F \left(\int_E |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty.$$



$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$$

Euler

$$e^{i\ell} = \cos(\ell) + i \cdot \sin(\ell)$$

$$\operatorname{Re}(e^{i\ell}) = \cos(\ell) \quad \operatorname{Im}(e^{i\ell}) = \sin(\ell)$$

Démonstration:

$$\begin{aligned}
 \cos(2\theta) &= \cos(\theta + \theta) = \operatorname{Re}\left(e^{i(\theta+\theta)}\right) = \\
 &= \operatorname{Re}\left(e^{i\theta} \cdot e^{i\theta}\right) = \\
 &= \operatorname{Re}\left((\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))\right) \\
 &= \operatorname{Re}\left(\underbrace{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)}_{=1-\cos^2(\theta)} + 2i \cdot \cancel{\cos(\theta)\sin(\theta)}\right) \\
 &= \cos^2(\theta) - \underbrace{\sin^2(\theta)}_{=1-\cos^2(\theta)} \\
 &= 2 \cdot \cos^2(\theta) - 1
 \end{aligned}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$i^2 = -1$$

$$\phi: U \rightarrow \phi(U)$$

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

es et Utilisation du jacobien.

ction Φ de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^n et à valeurs
absolue du jacobien de Φ « à la place » de $|\varphi'|$. Le jacobien
 explicite du changement de variable dans le cas particulier n

Théorème [modifier | modifier le code]

Énoncé [modifier | modifier le code]

Savoir :

- I un intervalle réel ;
- $\varphi: [a,b] \rightarrow I$ une fonction dérivable, de dérivée intégrable ;
- $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors,

$$\phi: \mathcal{U} \rightarrow \phi(\mathcal{U})$$

$$= c\alpha^2(\theta) - i$$

$$= 2c\cos^2(\theta) - 1$$

EXERCICE 8
Soit f et g deux fonctions intégrables sur \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}_+ . On définit l'application Φ sur \mathbb{R}^n ainsi que :

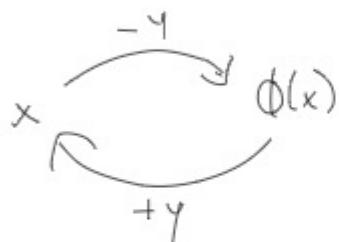
$$(f+g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy.$$

1. Pour y fixé dans \mathbb{R}^n , on considère $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\Psi(x) = x-y$. Montrer que Ψ est un difféomorphisme. Appliquer le théorème du changement de variable pour $\mathbb{R}^n - \{0\}$ pour justifier que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(\Psi(x)) d\Psi(x).$$

2. Appliquer le théorème du jacobien pour montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(x-y) dx < +\infty$ si et seulement si $f+g$ est presque partout sur \mathbb{R}^n .

3. Pour x fixé dans \mathbb{R}^n , on considère $\Theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par $\Theta(y) = x-y$. Montrer que Θ est un difféomorphisme. Appliquer le théorème du changement de variable pour montrer que $f+g = \Phi(f+g)$.



$$\Phi(x) = x-y \in C^1$$

$$\Phi^{-1}(x) = x+y \in C^1$$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix} \stackrel{\Phi(x)}{\rightarrow} \Phi_n$$

$$\mathcal{J}\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Cas des intégrales multiples

[Articles détaillés : Changement de variables dans les intégrales multiples et Utilisation du jacobien.](#)

Lorsque f est une fonction de plusieurs variables, on remplace y par une **injection** Φ de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R}^n . Outre le changement du domaine d'intégration, on utilise la valeur absolue du jacobien de Φ « à la place » de $|y^n|$. Le jacobien est le déterminant de la matrice jacobienne J_Φ . On donne ici la formulation explicite du changement de variable dans le cas particulier $n=2$:

$$\iint_{\Phi(U)} f(x, y) dx dy = \iint_U f(\Phi(u, v)) |\det J_\Phi(u, v)| du dv$$

Pour plus de précision, se reporter aux deux articles détaillés.

$$\int_0^2 e^{x^3} \cdot 3x^2 dx = \int_0^8 e^x dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\Phi(x)) \cdot |\det \mathcal{J}\Phi| d\lambda_n(x) = 1$$

$$\Phi(\mathbb{R}^n) = \{x+y \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array} \right) = E_n$$

$$|\det \mathcal{J}\Phi| = |\det E_n| = 1$$

Théorème

[Énoncé](#)

Soyons :

- Un intervalle réel :
- $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, de croissance croissante ;
- $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors,

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Remarquez qu'il n'est pas nécessaire que φ soit injective sur $[a, b]$ (voir note).

Par définition, poser

$$x = \varphi(t) \text{ avec } t \in [a, b].$$

$$\text{appelé faire un changement de variable}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\varphi(x)) \cdot |\det \mathcal{J}\varphi| d\lambda_n(x)$$

EXERCICE 4
Soit f et g deux fonctions intégrables de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}_+ . On définit l'application $f * g$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}_+ par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)d\lambda_n(y).$$

1. Pour y fixé dans \mathbb{R}^n , on considère $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par $\Phi(x) = x - y$. Montrer que Φ est un difféomorphisme. Appliquer la formule du changement de variable pour $U = \mathbb{R}^n$ pour justifier que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)d\lambda_n(x).$$

2. Appliquer le théorème de Fubini pour montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)d\lambda_n(x) < +\infty$ puis en déduire que $f * g(x)$ existe presque partout sur \mathbb{R}^n .

3. Poser x fixé dans \mathbb{R}^n , on considère $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par $\Psi(y) = x - y$. Montrer que Ψ est un difféomorphisme. Appliquer la formule du changement de variable pour justifier que $f * g = g * f$.

Soit (E, \mathcal{A}, μ) et (F, \mathcal{B}, ν) deux espaces mesurés.

Théorème (Théorème de Fubini-Tonelli)

Pour toute fonction mesurable positive f sur $E \times F$,

$$\int_{E \times F} f(x,y) d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_E \left(\int_F f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_F \left(\int_E f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \quad (*)$$

Théorème (Théorème de Fubini-Lebesgue)

Pour toute fonction mesurable $f : E \times F \rightarrow \mathbb{C}$, telle que

$$\int_{E \times F} |f(x,y)| d(\mu \otimes \nu)(x,y) < \infty,$$

la suite d'égalités (*) reste vraie.

NB. Par le théorème de Fubini-Tonelli, la condition équivaut à

$$\int_E \left(\int_F |f(x,y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty \quad \text{ou} \quad \int_F \left(\int_E |f(x,y)| d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty.$$

Zoom

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) d\lambda_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) d\lambda_n(y)}_{\geq 0} d\lambda_n(x) = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) d\lambda_n(x) \right) d\lambda_n(y) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\lambda_n(x) \right)}_{=: C < \infty} d\lambda_n(y) = \\
 &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\lambda_n(x) \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) d\lambda_n(y) \right) < \infty \\
 &\quad \swarrow \qquad \searrow \\
 f * g : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\
 \text{est intégrables}
 \end{aligned}$$

Théorème
 $\delta : (\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$
 mesurable

$$\int \delta d\mu < \infty \Leftrightarrow \delta < \infty \text{ presque partout}$$

$$A = \{ \delta * g = +\infty \}$$

$$\begin{aligned}
 \delta^n(A) &= +\infty \\
 \delta^n(A) &= +\infty \\
 \delta^n(A) &= +\infty \\
 \delta^n(A) &= +\infty
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta^n(A) = 0$$

$\Rightarrow \delta * g < \infty$ presque partout

$$\begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$z = x - y$$

$\Rightarrow \log < \infty$ presque partout

EXERCICE 4
 Soit f et g deux fonctions intégrables de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}_+ . On définit l'application $f \circ g$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}_+ par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) d\lambda_n(y).$$

1. Pour y fixé dans \mathbb{R}^n , on considère $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par $\Phi(x) = x - y$. Montrer que Φ est un difféomorphisme. Appliquer la formule de changement de variable pour $C = \mathbb{R}^n$ pour justifier que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\lambda_n(x)$$

2. Appliquer le théorème de Fatou pour montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) d\lambda_n(x) < +\infty$ puis en déduire que $f * g(x)$ existe presque partout sur \mathbb{R}^n .

3. Pour x fixé dans \mathbb{R}^n , on considère $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par $\Psi(y) = x - y$. Montrer que Φ est un difféomorphisme. Appliquer la formule de changement de variable pour vérifier que

- f * g = g * f.*

$$\left(-1 + \mathcal{O}(1) \right) \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial \mu} \right)$$

$$\left| \det J\psi \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n} \end{pmatrix} \right|$$

\downarrow

$$g * f_{\bar{x}} = \int g(y) \cdot f(x-y) d\delta_n(y)$$

$$\int_a^b g(y) f(\Psi(y)) d\delta_n(y)$$

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla \tilde{\psi}|^2 + \tilde{\psi}^2 \right) dx - \int_{\Omega} \left(\psi^2 + |\nabla \psi|^2 \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(\Psi(\Phi(y))) |\Phi(y)| \det f^4$$

$\vdash \Psi(\Phi(x)) = \{x-y \mid y \in \mathbb{R}^n\}$

$$\begin{aligned}
 z = \psi(y) &= x - y = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix} & z = x - y \\
 \psi(y) &= x - y \quad \checkmark & \Rightarrow y = x - z \\
 \psi^{-1}(\psi(y)) &= \psi^{-1}(x - y) = x - (x - y) = y \quad \checkmark & \Rightarrow \psi^{-1}(y) = x - y
 \end{aligned}$$

$\left. \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right| = \left| (-1)^n \right| = 1$

$\boxed{\psi^{-1} = \psi}$

$$\begin{aligned}
 f(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\hat{\psi}^{-1}(y)) \cdot f(\hat{\psi}(y)) \quad d\delta_n = \int_{\mathbb{R}^n}
 \end{aligned}$$

$$f(x) = g(\psi^{-1}(x)) \circ f(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot g(x-y) d\delta_{x,y}(y) = (f * g)(x)$$

Cas des intégrales multiples | [modifier](#) | [modifier le code](#)

Articles détaillés : Changement de variables dans les intégrales multiples et Utilisation du jacobien.

Lorsque f est une fonction de plusieurs variables, on remplace y par une [injection](#) Φ de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R}^N . Outre le changement du domaine d'intégration, on utilise la valeur absolue du jacobien de Φ « à la place » de $|y'|$. Le jacobien est la [déterminant](#) de la matrice jacobienne J_Φ . On donne ici la formulation explicite du changement de variable dans le cas particulier $n = 2$:

$$\iint_{\Phi(U)} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_U f(\Phi(u, v)) |\det J_\Phi(u, v)| \, du \, dv.$$

Pour plus de précision, se reporter aux deux articles détaillés.

$$\int (\psi(x))^s \cdot m(\psi(x)) \cdot |\det \nabla \psi| = \int x^s \cdot m(x) \, dx$$

$$\int h(\psi(x)^{10}) \cdot \cos(\psi(x)+1) \cdot (\det f' \psi) dx = \int h(x^{10}) \cdot \cos(x+1) dx$$

$$f(x) = h(x^{\alpha}) \circ c_0(x+1)$$

$$f(\psi(x)) = h(\psi(x)^{10}) \cdot \cos(\psi(x) + 1)$$

$$\int \left(\left(h(\psi(x)) \right)^{10} + \sin(\psi(x)) \right) \cdot \det \Psi$$

$$f(x) = h(x)^{10} + m(x)$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R}$
 f continue en x_0 : \Leftrightarrow
 $f(x_n)$ converge avec $x_n \rightarrow x_0$:
 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

$\forall u \in \mathbb{R}$

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_x(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iu_n x} dP_x(x) =$$

$u \in \mathbb{R}$, pourquoi $\phi_u \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_x)$

$$\int |\phi_u| dP_x = \int_{\mathbb{R}^n} |e^{iux}| dP_x = \int_{\mathbb{R}^n} 1 dP_x = P_x(\mathbb{R}^n) = 1 < \infty$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{iu_n x} dP_x(x) \\ &\stackrel{\text{continuité dominée}}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lim_{n \rightarrow \infty} iu_n x} dP_x(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iux} dP_x(x) \end{aligned}$$

Théorème (Théorème de continuité sous l'intégrale)

Soit $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction de $I \times E$ dans \mathbb{C} (où I est un intervalle de \mathbb{R}). On suppose que :

- (mesurabilité) pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(t, x)$ est mesurable;
- (continuité) pour μ -presque tout $x \in E$, $t \mapsto f(t, x)$ est continue sur I ;
- (domination) il existe une fonction $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable telle que $\int \varphi d\mu < \infty$ et

pour tout $t \in I$, pour μ -presque tout $x \in E$, $|f(t, x)| \leq \varphi(x)$.

Alors la fonction

$$F : t \mapsto F(t) = \int f(t, x) d\mu(x)$$

est bien définie pour tout $t \in I$, et est continue sur I .

Remarque : Soit X un espace séparable de mesure $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$. On appelle $\mathcal{L}^1(X)$ l'ensemble des fonctions $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\int_X |f|^2 dP_X < \infty$. On appelle $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dP_X < \infty$.

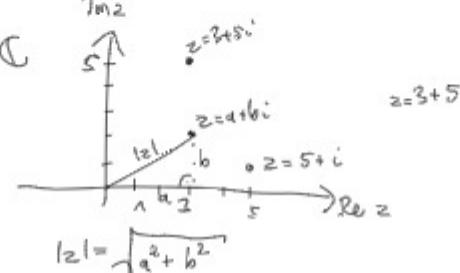
1. Montrer que l'intégrale $\int_X |f|^2 dP_X$ existe.
2. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace de $L^2(X)$ qui est fermé dans $L^2(X)$.
3. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est le sous-espace dual de $L^2(X)$ avec la norme $\|f\|_{\mathcal{L}^1} = (\int_X |f|^2 dP_X)^{1/2}$.
4. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1(X)$ alors $\int_X f dP_X = 0$ si et seulement si $f = 0$ P_X -presque partout.
5. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^2(X)$.
6. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
7. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
8. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
9. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
10. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
11. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
12. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
13. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
14. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
15. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
16. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
17. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
18. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
19. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
20. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
21. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
22. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
23. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
24. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
25. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
26. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
27. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
28. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
29. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
30. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
31. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
32. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
33. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
34. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
35. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
36. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
37. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
38. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
39. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
40. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
41. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
42. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
43. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
44. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
45. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
46. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
47. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
48. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
49. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
50. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
51. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
52. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
53. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
54. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
55. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
56. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
57. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
58. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
59. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
60. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
61. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
62. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
63. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
64. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
65. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
66. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
67. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
68. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
69. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
70. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
71. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
72. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
73. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
74. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
75. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
76. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
77. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
78. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
79. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
80. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
81. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
82. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
83. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
84. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
85. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
86. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
87. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
88. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
89. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
90. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
91. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
92. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
93. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
94. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
95. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
96. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
97. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
98. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
99. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.
100. Montrer que $\mathcal{L}^1(X)$ est un sous-espace fermé de $L^1(X)$.

$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $w \mapsto e^{iaw}$ $f_a \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_x)$

$$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto e^{iux}$$

$$z = a + bi \in \mathbb{C}$$



$$e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t) \quad \text{Euler!}$$

$$|e^{it}| = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = \sqrt{1} = 1$$

