11.2 Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

1. $L_1 =_{\text{def}} \{a^k b^m \mid k > m\}$
2. $L_2 =_{\text{def}} \{w \in \{a,b\}^* \mid w^R = w\}$
3. (!) $L_3 =_{\text{def}} \{a^k \mid k \text{ Primzahl}\}$

Lösungshinweis: Hier sollen Sie das Pumping-Lemma *anwenden*, d.h. Sie müssen Ihren Beweis entlang der Argumente (a), (b), (c) und (d) aus der Vorlesung aufbauen.

$3 > 2$

$\underbrace{aa}_{x}\underbrace{a}_{y}\underbrace{bb}_{=z}$

$xy^0z = aabb \notin L$

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Wähle $w := a^{n+1}b^n \in L_1$ $\quad |w| \geq n$ ✓

Sei $w = xyz$ eine beliebige Aufteilung von w mit $|xy| \leq n$ und $|y| \geq 1$.

Da $w = a^{n+1}b^n$ und $|xy| \leq n$ so finden $1 \leq k \leq n$ sodass $y = a^k$ (und $x = a^{n+1-k}$).

Wähle $i := 0$

$xy^iz = a^{n+1-k} \cdot \underset{\varepsilon}{y^0} \cdot z = a^{n+1-k} \cdot z \notin L_1$

da $|a^{n+1-k}z|_b = n$

$|a^{n+1-k}z|_a = n+1-k \leq n$ $\quad (k \geq 1)$

$\Rightarrow$ Pumping-Eigenschaft nicht erfüllt

$\Rightarrow L_1$ ist nicht regulär

Lemma 4.9.1 (Pumping-Lemma)

Jede reguläre Sprache L hat die folgende Pumping-Eigenschaft:
Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, so dass gilt:

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iw \in L$.

Bei der *Anwendung* des Pumping Lemmas (PL) wollen wir zeigen, dass die dort genannte Eigenschaft aller regulären Sprachen für eine bestimmte Sprache L **nicht** gilt. Dazu müssen wir folgendes nachweisen:

(a) Für jede beliebige Konstante n

(b) existiert ein Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$, so dass

(c) jede Aufteilung von w in $w = xyz$

(d) mindestens einen der drei Punkte (1), (2) oder (3) aus dem PL verletzt.

$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$
$\exists w \in L$ mit $|w| \geq n$
sodass $\forall$ Aufteilungen $w = xyz$
mit $|xy| \leq n$ und $|y| \geq 1$
$\exists i \in \mathbb{N}_0 : xy^iz \notin L$

$\neg(\forall x : A(x)) \equiv \exists x : \neg A(x)$

$\neg(\exists x : A(x)) \equiv \forall x : \neg A(x)$

$\neg(\forall x \exists y \forall n : A(x,y,n)) \equiv \exists x \forall y \exists n : \neg A(x,y,n)$

$L = \{abcd^ke \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

$\exists n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ $\forall w$ mit $|w| \geq n$
$\exists$ Zerlegung $w = xyz$ mit
- $|xy| \leq n$
- $|y| \geq 1$
- $\forall i \in \mathbb{N}_0 : xy^iz \in L$

Wähle $n := 4$

Sei $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq n = 4$

$\Rightarrow$ Wir finden $k \in \mathbb{N}$ sodass $w = abcd^ke$ ist.

Wähle $x := abc$ $\quad y := d$ $\quad z := d^{k-1}e$

Jetzt $|xy| = 4 \leq n = 4$ ✓

$|y| = 1 \geq 1$ ✓

$xy^0z = abcd^{\overset{\geq 0}{k-1}}e \in L$ ✓

$\forall i \in \mathbb{N}_{\geq 1} : xy^iz = abc\underbrace{d^i \cdot d^{k-1}}_{d^{i+k-1}}e \in L$ ✓

$\Rightarrow L$ erfüllt Pumping-Eigenschaft

$L_2 = L((\overset{x}{abc})(\overset{y}{d+ef})^*z)$

Wähle $n := 3 + 2 = 5$

usw.

$L_3 = L(\underset{2}{ab}d^*\underset{2}{cf}(\underset{y}{qr}+s)^*)$

Wähle $n := 2 + 2 + 2 = 6$

Sei $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq n = 6$.

1. Fall: Wir finden $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\tilde{w} \in \Sigma$ sodass $w = abd^kcf\tilde{w}$

Wähle $x := ab$ $\quad y := d$ $\quad z := d^{k-1}cf\tilde{w}$

Dann $|xy| = 3 \leq n = 6$ ✓

$|y| = 1 \geq 1$ ✓

$xy^0z = abd^{\overset{\geq 0}{k-1}}cf\tilde{w} \in L$ ✓

$\forall i \geq 1 : xy^iz = abd^id^{k-1}cf\tilde{w} \in L$ ✓

2. Fall: Wir finden $m \in \mathbb{N}$ sodass $w = abcf(qr+s)^m$

$x := abcf$ $\quad y := "qr+s"$ $\quad z :=$

$|xy| = 6 \leq n = 6$ ✓