Aufgabe 2: DNF

Die boolsche Funktion f ist durch die folgende Wertetabelle gegeben:

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Stellen Sie f als disjunktive Normalform (DNF) dar.

$$f = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}c + abc$$

Definition: Disjunktive Form, Konjunktive Form

Gegeben: Variablenvektor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

Eine boolesche Funktion f ist eine eine Disjunktive/Konjunktive Form, wenn

Disjunktive Form (DF): f besteht nur aus *disjunktiv verknüpften Produkttermen*
z.B. $f(a,b,c) = a\bar{b} + bc + ab\bar{c}$

Konjunktive Form (KF): f besteht nur aus *konjunktiv verknüpften Summentermen*
z.B. $f(a,b,c) = (\bar{a} + b) \cdot (a + c) \cdot (a + \bar{c})$

Eine boolesche Funktion f ist eine:

Disjunktive Normalform (DNF), wenn f nur aus **disjunktiv** verknüpften **Mintermen** besteht.

Minterm: Produktterm, der **alle** Literale entweder negiert oder nicht-negiert enthält

- Minterm für genau eine Eingangsbelegung „1“, sonst immer „0“.

Aufgabe 6: KNF [4P]

Die boolsche Funktion f ist durch die folgende Wertetabelle gegeben:

a	b	c	d	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

1) $\overline{a+b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$
2) $\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$
De Morgan

Doppelte Negation

$\bar{\bar{a}} = a$

Stellen Sie f als konjunktive Normalform dar.

$$f = \overline{\bar{a}b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d} + abc\bar{d}} =$$

$$= \overline{\bar{a}b\bar{c}\bar{d}} \cdot \overline{\bar{a}b\bar{c}d} \cdot \overline{a\bar{b}\bar{c}\bar{d}} \cdot \overline{a\bar{b}c\bar{d}} \cdot \overline{abc\bar{d}} =$$

$$= (a+\bar{b}+c+d) \cdot (a+\bar{b}+c+\bar{d}) \cdot (\bar{a}+b+c+d) \cdot (\bar{a}+b+\bar{c}+d) \cdot (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+d)$$

Aufgabe 1: deMorgan Präsenz

*Welche der folgenden Gleichungen wenden das "De Morgansche Gesetz" **direkt** an?*

a) $a + a \cdot b = a$ Absorptionsgesetz

b) $\overline{a \cdot b} = \overline{b \cdot a}$ Kommutativität

c) $a + b = \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}}$ De Morgan und doppelte Negation

d) $\overline{(a+b) + \bar{c}} = \overline{(a+b)} \cdot c$ De Morgan " " "

e) $a(b+c) = ab + ac$ Distributivgesetz

"DeMorgansches Gesetz":

$$\overline{a+b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$
$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$

Rechenregeln

Kommutativität:	$a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativität:	$a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Distributivität:	$a \cdot (b + c) = ab + ac,$ $a + (bc) = (a + b)(a + c)$
Neutrale Elemente:	$x + 0 = x$ und $x \cdot 1 = x$
Komplementäres Element:	$a + \neg a = 1$ und $a \cdot \neg a = 0$

Weitere Rechenregeln

- Maximale Elemente $x + 1 = 1$, $x \cdot 0 = 0$
- Idempotenzgesetze $x + x = x$, $x \cdot x = x$
- Assoziativgesetze $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Absorptionsgesetze $a \cdot (a + b) = a$, $a + (a \cdot b) = a$
- De Morgansche Gesetze $\overline{a+b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$, $\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$

Beweis At

a	b
0	0
0	1
1	0
1	1

Aufgabe 5: Boolsche Algebra [6P]

Überprüfen sie die Äquivalenz der folgenden Formeln mithilfe der Regeln der boolschen Algebra:

- $((a + b)(c)) + a\bar{b} = (bc)$
- $ab + a\bar{b} + ac + abc = ac$

Überprüfen Sie die Äquivalent der folgenden Formel mithilfe von Wertetabellen:

- $ab + \bar{b}c = (\bar{a}\bar{b}c) + c(a + b)$

Distributivgesetz

$$(a+b) \cdot c + a\bar{b} =$$
$$= (ac + bc) + a\bar{b} \neq bc$$

$$ab + a\bar{b} + ac + abc =$$

Distributivgesetz

$$= a \cdot (b + \bar{b}) + ac + abc =$$

Komplementäres Element $\rightarrow = a \cdot 1 + ac + abc$

Neutrales Element $\rightarrow = a + ac + abc$

Absorptionsgesetz $\rightarrow = a + abc$

Assoziativgesetz $\rightarrow = a + a \cdot (b \cdot c)$

Absorptionsgesetz $\rightarrow = a \neq ac$

Aufgabe 5: Boolsche Algebra [6P]

Überprüfen sie die Äquivalenz der folgenden Formeln mithilfe der Regeln der boolschen Algebra:

- $((a+b)(c)) + a\bar{b} = (bc)$
- $ab + a\bar{b} + ac + abc = ac$

Überprüfen Sie die Äquivalent der folgenden Formel mithilfe von Wertetabellen:

- $ab + \bar{b}c = (\bar{a}\bar{b}c) + c(a+b)$

a	b	c	$a \cdot b$	+	$\bar{b}$	$\bullet\, c$	$\bar{a}$	$\bullet\,(\bar{b} \cdot c)$	+	c	$\bullet\,(a+b)$
0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1

Ausdrücke sind nicht äquivalent

Shannonscher Entwicklungssatz

Grundlage von BDDs ist der Shannonscher Entwicklungssatz:

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_n) = x_i \cdot f(x_1,\ldots,x_i=1,\ldots,x_n) + \bar{x}_i \cdot f(x_1,\ldots,x_i=0,\ldots,x_n)$$

- Ausdruck $f|_{x_i} = f(x_1,\ldots,x_i=1,\ldots,x_n)$ heißt auch Kofaktor von f nach x_i
- Ausdruck $f|_{\bar{x}_i} = f(x_1,\ldots,x_i=0,\ldots,x_n)$ heißt auch Kofaktor von f nach $\neg x_i$

Damit kurz: $f(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_n) = x_i \cdot f|_{x_i} + \bar{x}_i \cdot f|_{\bar{x}_i}$

Aufgabe 3: Shannonscher Entwicklungssatz

Die boolsche Funktion g ist gegeben durch $g = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}c + abc$
Stellen Sie g nach der in der Vorlesung vorgestellten if-then-else Schreibweise mit der Variablenordnung:

a) $a < b < c$

b) $b < c < a$

dar.

a) $g(a,b,c) = a \cdot (\bar{b}c + bc) + \bar{a} \cdot (\bar{b}c + b\bar{c}) =$

b) $g(a,b,c) = b \cdot (\bar{a}\bar{c} + ac) + \bar{b} \cdot (\bar{a}c + ac)$

Binäre Entscheidungsdiagramme, if-then-else-Darstellung

Beispiel:

$$\begin{aligned} ab + cd &= \text{if } a \text{ then } f|_a \text{ else } f|_{\bar{a}} \\ &= \text{if } a \text{ then } (b + cd) \text{ else } (cd) \\ &= \text{if } a \text{ then (if } b \text{ then } 1 \text{ else } (cd)) \text{ else (if } b \text{ then } (cd) \text{ else } (cd)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cd &= \text{if } c \text{ then } (d) \text{ else } (0) \\ &= \text{if } c \text{ then (if } d \text{ then } 1 \text{ else } 0) \text{ else } 0 \end{aligned}$$

$g(a,b,c) =$ if a then $(\bar{b}c + bc)$ else $(\bar{b}c + b\bar{c})$

$=$ if a then (if b then c else c) else (if b then $\bar{c}$ else c)

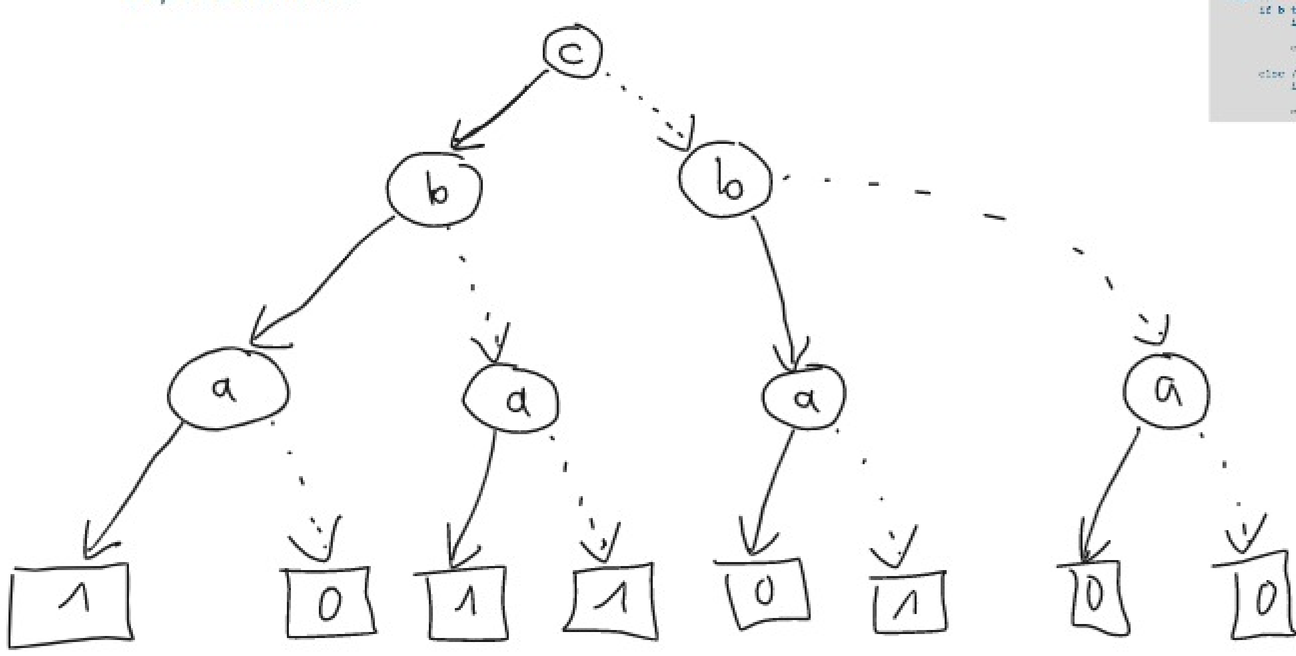
(if c then 0 else 1)

$=$ if a then (if b then (if c then 1 else 0) ...

Aufgabe 4: BDD

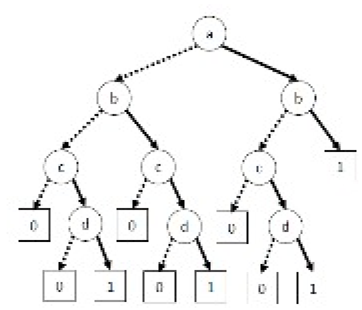
a) *Zeichnen Sie den zur Funktion $g = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}c + abc$ (siehe Aufgabe 7) gehörenden OBDD mit der Variablenordnung $c < b < a$*

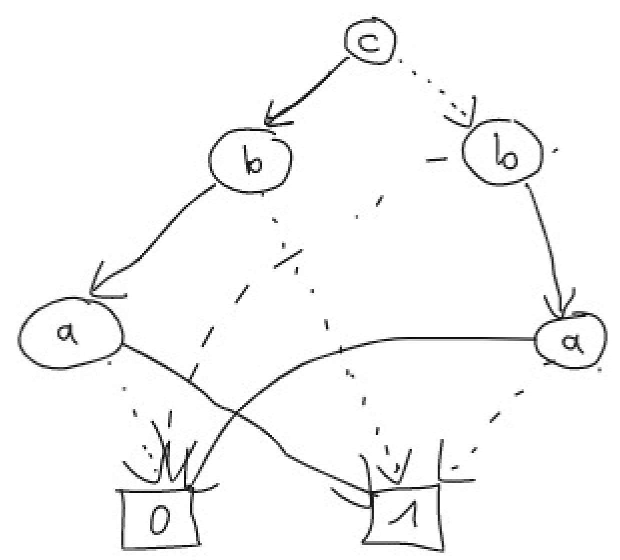
b) *Reduzieren Sie den OBDD aus Aufgabenteil a) unter Angabe aller Zwischenschritte und zeichnen Sie den entsprechenden ROBDD.*



BDD, Beispiel

```
if a then // 1b+cd
    if b then 1
    else // 10+cd
        if c then // 10+1d
            if d then 1 else 0
        else 0 // 10+0d
else // 0b+cd
    if b then // 01+cd
        if c then // 01+1d
            if d then 1 else 0
        else // 01+0d
            0
    else // 00+cd
        if c then // 01+1d
            if d then 1 else 0
        else 0
```



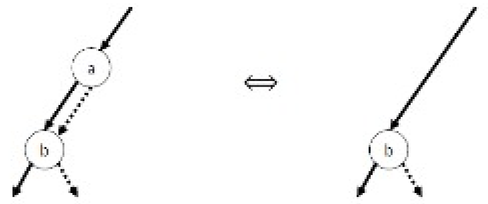


Eliminationsregel (engl. Deletion Rule)

Eliminationsregel:

*Wenn **0(v) = 1(v)**, dann*

***entferne Knoten (v)**, leite eingehende Kante auf 0(v) um.*

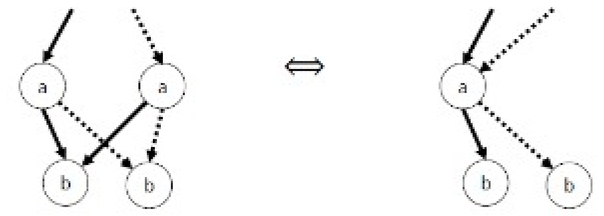


Isomorphieregel (engl. Merging Rule)

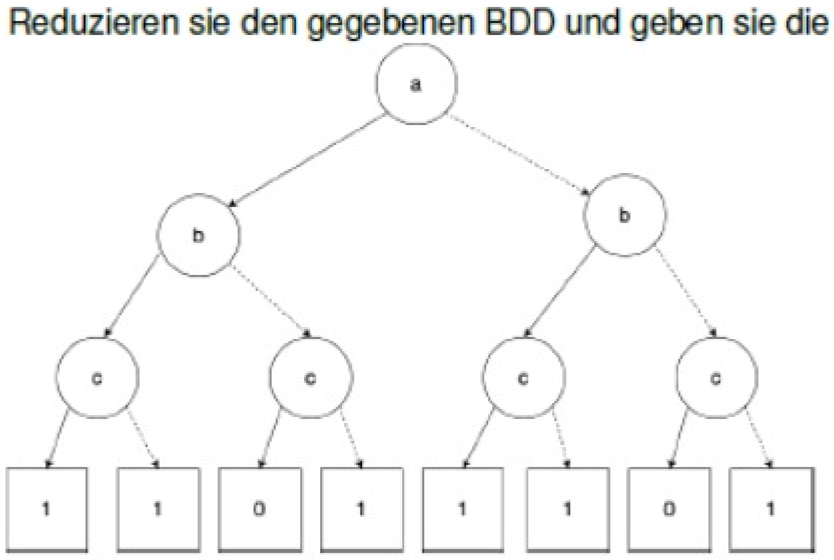
Isomorphieregel:

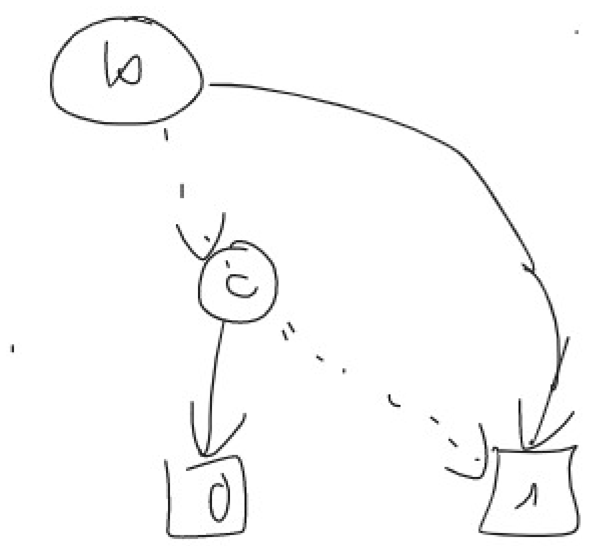
Wenn $(\text{label}(v) = \text{label}(v^*)) \wedge (0(v) = 0(v^*)) \wedge (1(v) = 1(v^*))$
entferne v^* und lenke alle nach v^* führenden Kanten nach v um.

Beispiel:



- Reduzieren sie den gegebenen BDD und geben sie die Wertetabelle an.



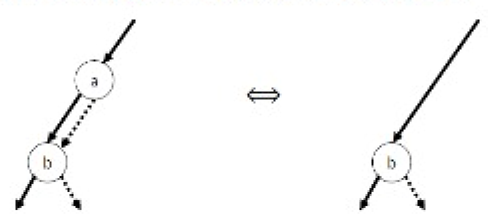


Eliminationsregel (engl. Deletion Rule)

Eliminationsregel:

*Wenn **0(v) = 1(v)**, dann*

***entferne Knoten (v)**, leite eingehende Kante auf 0(v) um.*



Isomorphieregel (engl. Merging Rule)

Isomorphieregel:

Wenn $(\text{label}(v) = \text{label}(v^*)) \vee (0(v) = 0(v^*)) \vee (1(v) = 1(v^*))$
entferne v^* und lenke alle nach v^* führenden Kanten nach v um.

Beispiel: