Aufgabe 3

(Hausaufgabe, Abgabe freiwillig)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. mit Dichte f_θ bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion p_θ, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

i) Begründen Sie, warum unter den Regularitätsvoraussetzungen für die Informationsungleichung eine untere Schranke für die Varianz eines erwartungstreuen Schätzers der Form $\frac{C}{n}$ mit geeigneter Konstante $C > 0$ existiert.

ii) Es seien $X_1, \dots, X_n$ gleichverteilt auf $[0, \theta]$. Bestimmen Sie die Varianz des erwartungstreuen Schätzers $\hat{\theta} = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$.

iii) Warum stehen i) und ii) nicht im Widerspruch zueinander?

i)

Theorem (Cramér-Rao-Informationsungleichung)

Für ein statistisches Modell $(F_{\theta, X_1, \dots, X_n})_{\theta \in \Theta}$ gelten die Regularitätsannahmen von Lemma 26.2 und T sei eine Statistik, so dass der Erwartungswert existiert. Wir definieren $\Psi(\theta) = E_\theta[T]$ und nehmen an, dass Ψ differenzierbar ist. Dann

$$\operatorname{Var}_\theta[T] \geq \frac{(\Psi'(\theta))^2}{I_n(\theta)} = \frac{\Psi'(\theta)^2}{n \cdot I_1(\theta)} \geq \frac{C}{n}, \quad C > 0$$

$$I_1(\Theta) = \mathbb{E}_\Theta\left[\left(\frac{\partial \log f_\Theta(X_1)}{\partial \Theta}\right)^2\right] = \operatorname{Var}_\Theta\left[\frac{\partial \log f_\Theta(X_1)}{\partial \Theta}\right]$$

$$(\Psi'(\Theta))^2 = \left(\frac{\partial E_\Theta[T]}{\partial \Theta}\right)^2$$

T erwartungstreu

$$\frac{\Psi'(\Theta)^2}{I_n(\Theta)} = \frac{\left(\frac{\partial E_\Theta[T]}{\partial \Theta}\right)^2}{n \cdot I_1(\Theta)} = \frac{\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Theta}\right)^2}{n \cdot I_1(\Theta)} = \frac{1^2}{n \cdot I_1(\Theta)} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{I_1(\Theta)}}_{= C}$$

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$
$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

ii) $$\operatorname{Var}_\Theta[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}_\Theta[(\hat{\Theta} - \mathbb{E}[\hat{\Theta}])^2] =$$

$$f_{X_1, \Theta}(x) = \frac{1}{\Theta} \cdot 1\!\!1_{[0,\Theta]}(x)$$

$$f_{X_1, \dots, X_n, \Theta}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i, \Theta}(x_i) = \frac{1}{\Theta^n} \cdot 1\!\!1_{[0,\Theta]^n}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\mathbb{E}_\Theta[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}_\Theta\left[\frac{n+1}{n} X_{(n)}\right] = \frac{n+1}{n} \mathbb{E}_\Theta[\max\{X_1, \dots, X_n\}]$$

$$X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$
$$X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$$

$$= \frac{n+1}{n}\left[\underbrace{\int_0^\Theta \int_0^{x_1} \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_1} x_1 \cdot \underbrace{f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)}_{= \frac{1}{\Theta^n} 1\!\!1_{[0,\Theta]}(x_1, \dots, x_n)} \, dx_n \dots dx_3 \, dx_2 \, dx_1}_{= \frac{1}{n+1} \Theta} + \int_0^\Theta \int_0^{x_2} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_2} x_2 \cdot f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \, dx_n \dots dx_3 \, dx_1 \, dx_2 \; \dots\right] = \frac{n+1}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \Theta = \Theta$$

$\Rightarrow \hat{\Theta}$ ist erwartungstreu

$$= \frac{1}{\Theta^n} \int_0^\Theta x_1 \underbrace{\int_0^{x_1} \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_1} dx_n \dots dx_3 \, dx_2}_{= x_1^{n-1}} \, dx_1$$

$$= \frac{1}{\Theta^n} \int_0^\Theta x_1 \cdot x_1^{n-1} \, dx_1 =$$

$$= \frac{1}{\Theta^n} \int_0^\Theta x_1^n \, dx_1 = \frac{1}{\Theta^n} \left[\frac{1}{n+1} x_1^{n+1}\right]_0^\Theta$$

$$= \frac{1}{\Theta^n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \Theta^{n+1} = \frac{1}{n+1} \Theta$$

$$\frac{\Theta^{n+1}}{\Theta^n} = \Theta^1 = \Theta$$

$$\int_0^{x_1} 1 \, dx_2 = [x]_0^{x_1} = x_1$$

$$\int_0^{x_1} \underbrace{\int_0^{x_1} 1 \, dx_3}_{= x_1} dx_2 = \int_0^{x_1} x_1 \, dx_2 = x_1 \underbrace{\int_0^{x_1} dx_2}_{= x_1} = x_1^2$$

Var

$$\mathbb{E}_\Theta[\hat{\Theta}^2] =$$

$$= \mathbb{E}_\Theta\left[\left(\frac{n+1}{n} \cdot \max\{X_1, \dots, X_n\}\right)^2\right] =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \mathbb{E}_\Theta[\max\{X_1, \dots, X_n\}^2] =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left[\underbrace{\int_0^\Theta \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_1} x_1^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{\Theta^n}}_{= f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)} \, dx_n \dots dx_2 \, dx_1}_{= \frac{1}{n+2} \cdot \Theta^2} + \int_0^\Theta \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_2} x_2^2 \cdot \frac{1}{\Theta^n} \, dx_n \dots dx_1 \, dx_2 + \dots\right] = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot n \cdot \frac{1}{n+2} \cdot \Theta^2 =$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot n \cdot \frac{1}{n+2} \cdot \Theta^2 = \frac{(n+1)^2}{n \cdot (n+2)} \cdot \Theta^2$$

$$\frac{1}{\Theta^n} \int_0^\Theta x_1^2 \underbrace{\int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_1} 1 \, dx_n \dots dx_2}_{= x_1^{n-1}} \, dx_1 =$$

$$= \frac{1}{\Theta^n} \int_0^\Theta x_1^2 \cdot x_1^{n-1} \, dx_1 = \frac{1}{\Theta^n} \int_0^\Theta x_1^{n+1} \, dx_1 = \frac{1}{\Theta^n} \left[\frac{1}{n+2} x_1^{n+2}\right]_0^\Theta$$

$$= \frac{1}{\Theta^n} \cdot \frac{1}{n+2} \cdot \Theta^{n+2} = \frac{1}{n+2} \cdot \Theta^2$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}_\Theta[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}_\Theta[\hat{\Theta}^2] - \mathbb{E}_\Theta[\hat{\Theta}]^2$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n \cdot (n+2)} \cdot \Theta^2 - \Theta^2 =$$

$$= \left(\frac{(n+1)^2}{n \cdot (n+2)} - 1\right) \Theta^2 =$$

$$= \frac{(n+1)^2 - n \cdot (n+2)}{n \cdot (n+2)} \Theta^2$$

$$= \frac{\cancel{n^2} \cancel{+2n} + 1 \cancel{-n^2} \cancel{-2n}}{n \cdot (n+2)} \cdot \Theta^2$$

$$= \frac{1}{n \cdot (n+2)} \Theta^2$$

Aufgabe 3

(Hausaufgabe, Abgabe freiwillig)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. mit Dichte f_θ bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion p_θ, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

i) Begründen Sie, warum unter den Regularitätsvoraussetzungen für die Informationsungleichung eine untere Schranke für die Varianz eines erwartungstreuen Schätzers der Form $\frac{C}{n}$ mit geeigneter Konstante $C > 0$ existiert.

ii) Es seien $X_1, \dots, X_n$ gleichverteilt auf $[0, \theta]$. Bestimmen Sie die Varianz des erwartungstreuen Schätzers $\hat{\theta} = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$.

iii) Warum stehen i) und ii) nicht im Widerspruch zueinander?

Aus i) Unter Regularitätsvoraussetzungen

$\exists C > 0 \quad \forall$ erwartungstreuen Schätzer T gilt: $\operatorname{Var}_\Theta[T] \geq \frac{C}{n}$

iii)

Sei $(F_{\theta, X_1, \dots, X_n})_{\theta \in \Theta}$ ein statistisches Modell, so dass die folgenden Regularitätsannahmen gelten:

- $\Theta \subset \mathbb{R}$ offen $\Leftarrow$ erfüllt
- $A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_\theta(x) > 0\}$ bzw. $A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_\theta(x) > 0\}$ hängt nicht von θ ab, die Ableitung $\frac{\partial \log(p_\theta)}{\partial \theta}$ bzw. $\frac{\partial \log(f_\theta)}{\partial \theta}$ existiert auf ganz A
- Für jede Statistik T, deren Erwartungswert existiert, gilt

$$\frac{\partial}{\partial \theta} E_\theta[T] = \begin{cases} \sum_{x_1, \dots, x_n} \frac{\partial p_\theta(x_1, \dots, x_n)}{\partial \theta} T(x_1, \dots, x_n) \\ \int \dots \int \frac{\partial f_\theta(x_1, \dots, x_n)}{\partial \theta} T(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \end{cases}$$

nicht erfüllt!

$$\Theta = \mathbb{R}_{>0} = (0, \infty) \Leftarrow \text{offen}$$

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{f_\Theta(x)}_{\frac{1}{\Theta^n} \cdot 1\!\!1_{[0,\Theta]}(x_1) \cdots 1\!\!1_{[0,\Theta]}(x_n)} > 0\}$$

$$= [0, \Theta] \times \dots \times [0, \Theta]$$

$$= [0, \Theta]^n$$

hängt von Θ ab!

miro