Aufgabe 4

(Hausaufgabe, Abgabe freiwillig)

Es seien $X_1, ..., X_n$ u.i.v. Poisson(λ)-verteilt, $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass $(X_1, ..., X_n)^t$ einem exponentiellen Modell genügt und schreiben dies in natürlicher Parametrisierung.

Definition

Ein statistisches Modell $(F_{\theta,X_1,...,X_n})_{\theta\in\Theta}$ heißt exponentielle Familie, wenn $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ und es Statistiken $T_1, ..., T_d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, so dass sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. die Dichte darstellen lässt als

$$p_{\theta,X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = \mathbb{1}_{\{(x_1,...,x_n)^t\in A\}} e^{\sum_{j=1}^d c_j(\theta)T_j + d(\theta) + S(x_1,...,x_n)},$$

$$\text{bzw.} \quad f_{\theta,X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = \mathbb{1}_{\{(x_1,...,x_n)^t\in A\}} e^{\sum_{j=1}^d c_j(\theta)T_j + d(\theta) + S(x_1,...,x_n)},$$

mit $A \subset \mathbb{R}^n$, $c_j, d : \Theta \to \mathbb{R}$ und $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die Familie heißt einparametrig, falls $d = 1$, und mehrparametrig, falls $d > 1$.

$\forall k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = p_{\lambda,X_1}(k)$$

$$p_{\lambda,X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)$$

$$\overset{u}{=} p_{\lambda,X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot p_{\lambda,X_n}(x_n) =$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! \cdot \ldots \cdot x_n!} =$$

$$= \mathbb{1}_{\mathbb{N}_0^n}(x_1,...,x_n) \cdot e^{\underbrace{-n\lambda}_{d(\lambda)}} \cdot e^{\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)}_{T}\underbrace{\ln(\lambda)}_{c(\lambda)}} \cdot e^{\underbrace{-\ln(x_1! \cdot \ldots \cdot x_n!)}_{S(x_1,...,x_n)}}$$

$A = \mathbb{N}_0^n$

$$= \mathbb{1}_{\mathbb{N}_0^n}(x_1,...,x_n) \cdot e^{\underbrace{\ln(\lambda)}_{c(\lambda)}\sum_{i=1}^n x_i \underbrace{-n\lambda}_{d(\theta)} - \ln(x_1! \cdot \ldots \cdot x_n!)}$$

$$-n\lambda = (-n)\, e^{\ln(\lambda)}$$

$$= \mathbb{1}_{\mathbb{N}_0^n}(x_1,...,x_n) \cdot e^{\underbrace{\ln(\lambda)}_{\tilde\lambda} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{- n \cdot e^{\overbrace{\ln(\lambda)}^{\tilde\lambda}}}_{\tilde d(\tilde\lambda)} - \ln(x_1! \cdot \ldots \cdot x_n!)}$$

$$= \mathbb{1}_{\mathbb{N}_0}(x_1,...,x_n) \cdot e^{\underbrace{\ln(\lambda)}_{\tilde\lambda}}$$

$$\tilde d(\tilde\lambda) = -n \cdot e^{\tilde\lambda}$$

$$\boxed{x \in \mathbb{R} \quad a^x := e^{x \cdot \ln(a)}}$$

$$\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} = e^{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \ln(\lambda)}$$

$$\frac{1}{x_1!} = e^{-\ln(x_1!)}$$

$$\frac{1}{x_1! \cdot \ldots \cdot x_n!} = e^{-\ln(x_1! \cdot \ldots \cdot x_n!)}$$

$$e^5 \cdot e^3 = e^8$$

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

$$\boxed{\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)}$$

$$\frac{1}{x_1!} = (x_1!)^{-1} = e^{\ln((x_1!)^{-1})} = e^{-\ln(x_1!)}$$

Setzt man im exponentiellen Modell: $\tilde\theta_j := c_j(\theta)$, erhält man die Darstellung:

$$p_{\theta,X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = \mathbb{1}_{\{(x_1,...,x_n)^t\in A\}} e^{\sum_{j=1}^d \tilde\theta_j T_j + \tilde d(\tilde\theta_1,...,\tilde\theta_d) + S(x_1,...,x_n)},$$

$$\text{bzw.} \quad f_{\theta,X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = \mathbb{1}_{\{(x_1,...,x_n)^t\in A\}} e^{\sum_{j=1}^d \tilde\theta_j T_j + \tilde d(\tilde\theta_1,...,\tilde\theta_d) + S(x_1,...,x_n)}$$

Dies nennt man "natürliche Parametrisierung"

$X = (X_1, \dots, X_n)$

$f_{\mu,z} = f_\mu$

$f_{\mu,z} = f_z$

$f_{\mu,X}(x) = \frac{1}{2z} e^{-\frac{|x-\mu|}{z}} = \mathbb{1}_{\underset{A}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}}}}(x) \cdot$

$f_{\mu,X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = f_{\mu,X_1}(x_1) \cdots f_{\mu,X_n}(x_n) =$

$= \frac{1}{2z} \cdot e^{-\frac{|x_1-\mu|}{z}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2z} \cdot e^{-\frac{|x_n-\mu|}{z}}$

$|x-\mu| = \begin{cases} x-\mu & \text{falls } x \geq \mu \\ -x+\mu & \text{falls } x < \mu \end{cases}$

$= \left(\frac{1}{2z}\right)^n \cdot e^{\sum_{i=1}^n -\frac{|x_i-\mu|}{z}} = \left(\frac{1}{2z}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{z}\sum_{i=1}^n |x_i-\mu|}$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$\Rightarrow$ keine exponentielle Familie

$\frac{1}{2z}$

$f_{z,X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{1}{2z}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{z}\sum_{i=1}^n |x_i-\mu|} = e^{\underbrace{-n \cdot \ln(2z)}_{d(z)} \underbrace{-\frac{1}{z}}_{c(z)} \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i-\mu|}_{T}} \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}(x_1,\dots,x_n)}_{= \mathbb{1}_{\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n\}}}$

$\left(\frac{1}{2z}\right)^n = (2z)^{-n} = e^{\ln((2z)^{-n})} = e^{-n \cdot \ln(2z)}$

$\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$

$\Rightarrow$ exponentielle Familie

Aufgabe 1
(gemeinsame Bearbeitung während des Tutoriums)

Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängig und diskret gleichverteilt auf der Menge $\{1, 2, ..., \theta\}$, wobei $\theta \in \Theta = \mathbb{N}$ unbekannt ist. Zeigen Sie, dass $T = max\{X_1, ..., X_n\}$ vollständig ist und nutzen Sie dies, um einen UMVU-Schätzer zu konstruieren.

Definition

Sei $(P_{\theta, X_1, ..., X_n})_{\theta \in \Theta}$ ein statistsches Modell. Eine Statistik $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ heißt vollständig, falls für alle messbaren Abbildungen $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit

$$E_\theta[g(T(X))] = 0$$

für alle $\theta \in \Theta$ folgt, dass für alle $\theta \in \Theta$

$$P_\theta(g(T(X)) = 0) = 1.$$

$\forall k \in \{1, 2, .., \Theta\} : \mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{1}{\Theta}$

$p_{\Theta, X_1} = \mathbb{1}_{\{1,2,..,\Theta\}}(k) \cdot \frac{1}{\Theta}$

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar
sodass $\forall \Theta \in \mathbb{N} : E_\Theta[g(T)] = 0$

Noch z.z.: $\mathbb{P}_\Theta(g(T(X)) = 0) = 1$

Wir wissen: $0 = \mathbb{E}_\Theta[g(T)] = \mathbb{E}_\Theta[g(\max\{X_1, .., X_n\})] =$

nach Eigenschaft von g

$= \sum_{k=1}^{\Theta} g(k) \cdot \underbrace{\mathbb{P}_\Theta(\max\{X_1, .., X_n\} = k)}_{>0}$

$\mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{3}$
$\mathbb{P}(X_1 = 7) = \frac{1}{6}$
$\mathbb{P}(X_1 = 100) = \frac{1}{2}$
$\mathbb{E}[X_1] = 2 \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot \frac{1}{6} + 100 \cdot \frac{1}{2}$

Beispiel: $\mathbb{P}_\Theta(\max\{X_1, X_2\} = k) = \mathbb{P}_\Theta(X_1 = k, X_2 \le k) + \mathbb{P}_\Theta(X_2 = k, X_1 < k) =$

$\boxed{\begin{array}{c}\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \\ \text{falls } A \cap B = \emptyset\end{array}}$

X_1, X_2 unabhängig

$= \mathbb{P}_\Theta(X_1 = k) \cdot \mathbb{P}_\Theta(X_2 \le k) + \mathbb{P}_\Theta(X_2 = k) \cdot \mathbb{P}_\Theta(X_1 < k)$

$= \frac{1}{\Theta} \cdot \frac{k}{\Theta} + \frac{1}{\Theta} \cdot \frac{k-1}{\Theta}$

$= \frac{1}{\Theta^2} \cdot (k + k - 1) = \frac{2k-1}{\Theta^2}$

$\Rightarrow 0 = \sum_{k=1}^{\Theta} g(k) \cdot \frac{2k-1}{\Theta^2} \quad \forall \Theta \in \mathbb{N}$

Das gilt für $\Theta = 1$: $\sum_{k=1}^{1=\Theta} g(k) \cdot \frac{2k-1}{\Theta^2} = g(1) \cdot (2 \cdot 1 - 1) = g(1) = 0$

Das gilt für $\Theta = 2$: $0 = \sum_{k=1}^{2} g(k) \cdot \frac{2k-1}{2^2} = \underbrace{g(1)}_{=0} \cdot ... + g(2) \cdot \frac{2 \cdot 2 - 1}{4} = 0$

$\Rightarrow g(2) = 0$

für $\Theta = 3$: $\Rightarrow g(3) = 0$

usw $g(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mathbb{P}_\Theta(g(T) = 0) = 1$

Für $\Theta = 1$:
$0 = g(1) \cdot \underbrace{\mathbb{P}_1(\max\{X_1, .., X_n\} = 1)}_{>0}$
$\Rightarrow g(1) = 0$

Für $\Theta = 2$:
$0 = \underbrace{g(1)}_{=0} \cdot * + g(2) \cdot \underbrace{\mathbb{P}_2(\max\{X_1, .., X_n\} = 2)}_{>0}$
$\Rightarrow g(2) = 0$

usw $\Rightarrow g(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mathbb{P}_\Theta(g(T) = 0) = 1 \quad \forall \Theta \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow T$ vollständig

miro