Aufgabe 1 [10 Punkte]

Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung: *Es sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $B \subseteq \Omega$ ein Ereignis. Bezeichne mit $\mathcal{U}_B := \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ und } B \text{ sind unabhängig}\}$ die Menge aller Ereignisse, die von B unabhängig sind. Dann gilt:*

(i) Für alle $A \in \mathcal{U}_B$ ist $A^c \in \mathcal{U}_B$

(ii) Für jede p.w.d. Folge $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{U}_B$ gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{U}_B$.

i) Sei also $A \in \mathcal{U}_B$, d.h. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Z.: $A^c \in \mathcal{U}_B$, d.h. $\underbrace{\mathbb{P}(A^c \cap B)}_{LS} = \underbrace{\mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B)}_{RS}$

$$RS = \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A)) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

$$\overset{A,B \text{ unabhängig}}{=} \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) =$$

$$= \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) =$$

$$= \mathbb{P}(A^c \cap B)$$

mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$

ii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{U}_B$, d.h. $\forall i \in \mathbb{N}: \mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B)$

Z.: $\mathbb{P}\left(\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right) = \underbrace{\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cdot \mathbb{P}(B)}_{RS}$

$$RS = \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cdot \mathbb{P}(B) \overset{\sigma\text{-Additivität von } \mathbb{P}}{=} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B)\right) =$$

$$\overset{A_i, B \text{ unabhängig}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B) =$$

$$\overset{\sigma\text{-Additivität von } \mathbb{P}}{=} \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i \cap B\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) \\ &= \underbrace{A_i \cap A_j}_{=\emptyset} \cap B = \emptyset\end{aligned}}$$