Aufgabe 1 [10 Punkte]

Sei Ω eine beliebige Menge. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{E} := \{E \subseteq \Omega \mid E \text{ oder } E^c \text{ ist h.a.}\}$$

höchstens abzählbar

eine σ-Algebra über Ω ist.

z.z.: $\mathcal{E}$ σ-Algebra, d.h.

1) $\Omega \in \mathcal{E}$
2) $\forall E \in \mathcal{E}: E^c \in \mathcal{E}$
3) $\forall (E_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}: \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{E}$

zu 1) $\Omega \in \mathcal{E}$, da $\Omega^c = \emptyset$ ist höchstens abzählbar ✓

$|\emptyset| = 0$

zu 2) Sei $E \in \mathcal{E}$. Zu zeigen: $E^c \in \mathcal{E}$, d.h. E^c h.a. oder $(E^c)^c$ h.a.

$\Rightarrow E$ h.a. $\vee$ E^c h.a.

oder

Kommutativität $\vee$

$\Rightarrow E^c$ h.a. $\vee$ E h.a.

$\|$

$\Rightarrow E^c$ h.a. $\vee$ $(E^c)^c$ h.a. $\Rightarrow E^c \in \mathcal{E}$

zu 3) Sei $(E_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$. Noch z.z.: $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{E}$, d.h. $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ h.a. oder $\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right)^c = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i^c$ h.a.

De Morgan

1. Fall $\forall i \in \mathbb{N}: E_i$ h.a.

$\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ h.a. $\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{E}$

E_1 überabzählbar $\Rightarrow E_1^c$ h.a.

$\Rightarrow \bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i^c \subseteq E_1^c$ h.a.

2. Fall Wir finden $i_0 \in \mathbb{N}$ sodass E_{i_0} überabzählbar

$\Rightarrow E_{i_0}^c$ h.a. $\Rightarrow \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right)^c = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i^c \subseteq E_{i_0}^c$ h.a.

$\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow \mathcal{E}$ σ-Algebra

Aufgabe 3 [10 Punkte]

Zeigen Sie, dass alle offenen sowie alle abgeschlossenen Teilmengen von R Borelmengen sind.[1]

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E})$ wobei $\mathcal{E} := \{\,]a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}, a<b\}$

Borelmengen

$A \subseteq \mathbb{R}$ offen :$\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$ $\exists \varepsilon > 0: \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \subseteq A$

Sei $\tau = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ offen}\}$

Zu zeigen: $\tau \subseteq \sigma(\mathcal{E})$

Sei $A \in \tau$, d.h. A offen.

Da A offen, so finden wir für alle $x \in A$ ein $\varepsilon_x > 0$ sodass $]x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x[\, \subseteq A$.

A abgeschlossen :$\Leftrightarrow$ A^c offen

$$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} \underbrace{]x-\varepsilon_x, x]}_{\in \mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})} = \bigcup_{x \in A \cap \mathbb{Q}} \underbrace{]x-\varepsilon_x, x]}_{\in \mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})} \in \sigma(\mathcal{E})$$

$\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ abzählbar und σ-Algebra ist abgeschlossen bzgl. abzählbarer Vereinigung

Noch z.z.: $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen: $A \in \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Sei also $A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen $\Rightarrow A^c$ offen $\Rightarrow A^c \in \sigma(\mathcal{E})$

gerade gezeigt

$\Rightarrow \underbrace{(A^c)^c}_{A} \in \sigma(\mathcal{E}) \Rightarrow A \in \sigma(\mathcal{E})$

$\sigma(\mathcal{E})$ ist als σ-Algebra c-stabil